Ekonomia. Rynek, gospodarka, społeczeństwo
45(2016), s. 135–169
DOI: 10.17451/eko/45/2016/147
ISBN: 0137-3056
www.ekonomia.wne.uw.edu.pl

Podstawy mikroekonomiczne agregatowej funkcji produkcji o stałych przychodach względem skali

Piotr Pietraszewski*

Bez wątpienia agregatowa funkcja produkcji jest najmniej satysfakcjonującym elementem makroekonomii.
J. Temple (1999, 150)

Streszczenie

Problem agregacji odniesiony do produkcji jest bardzo ważny dla współczesnej makroekonomii głównego nurtu ze względu na powszechne wykorzystywanie koncepcji agregatowej funkcji produkcji (AFP) tak w modelach teoretycznych, jak i w badaniach empirycznych. Celem artykułu jest teoretyczna rekonstrukcja mikroekonomicznych założeń leżących u podstaw AFP o stałych przychodach względem skali. Artykuł ma głównie charakter krytyczno-przeglądowy, systematyzuje rozproszone w różnych pracach ustalenia oraz uzupełnia je wynikami własnymi. Wyjaśniono związek koncepcji AFP z koncepcją równowagi ogólnej w gospodarce. Pokazano, że logicznie spójny obraz działalności produkcyjnej na poziomie pojedynczych firm w warunkach konkurencji doskonałej, w ramach którego da się skonstruować AFP o stałych przychodach względem skali, możliwy jest przy założeniu, że firmy funkcjonują na poziomie minimum swoich U-kształtnych krzywych kosztów przeciętnych, osiągając zerowe zyski czyste. Uogólniając rozważania na gospodarkę wielosektorową, rozpatrzono problemy, jakie dla kwestii istnienia AFP stwarza konieczność agregowania produkcji różnych dóbr.

Słowa kluczowe: agregatowa funkcja produkcji, stałe przychody względem skali, równowaga ogólna, konkurencja doskonała
JEL: E13, D41, D50
DOI: 10.17451/eko/45/2016/147

* Uniwersytet Łódzki, e-mail: ppietraszewski@uni.lodz.pl.

1. Wprowadzenie

Wyobrażenie o istnieniu zagregowanej funkcji produkcji dla gospodarki traktowanej jako całość zostało po raz pierwszy zarysowane przez Hicksa w jego *The Theory of Wages* (1932), choć zdaniem wielu autorów pierwocin tego pomysłu należy szukać w pracach XIX-wiecznego ekonomisty neoklasyka Clarka (zob. np. Blaug 2000, 477). Dla neoklasycznych ekonomistów ten konstrukt myślowy stanowił przede wszystkim element symplistycznej teorii podziału (udziału płac i zysków w łącznym dochodzie) na zasadzie produkcyjności krańcowej w zastosowaniu do całości gospodarki, pojmowanej tak, jakby była jednym wielkim przedsiębiorstwem. Pionierska praca Cobba i Douglasa (1928), a później prace Douglasa z innymi współpracownikami nad estymacją konkretnej postaci takiej funkcji miały utwierdzić ekonomistów w przekonaniu, że zarówno sama agregatowa funkcja produkcji, jak i oparta na niej teoria podziału znajdują potwierdzenie empiryczne. Idee te są powszechnie wykorzystywane zarówno w pracach teoretycznych (zagregowane modele gospodarki), jak i w opartych na nich badaniach empirycznych po dziś dzień.

We współczesnej teorii makroekonomicznej, w jej głównym nurcie, standardem jest tzw. podejście od strony dynamicznej równowagi ogólnej (*dynamic general equilibrium approach*), nazywane także makroekonomią walrasowską[1]. Podejście to zdominowało współczesną makroekonomię m.in. wskutek dążenia do oparcia modeli makroekonomicznych na podstawach mikroekonomicznych. Taki sposób budowania modeli makroekonomicznych uznany został za bardziej „naukowy” w porównaniu z wcześniejszym podejściem, wywodzącym się z tradycji keynesowskiej, w którym zależności między zmiennymi makroekonomicznymi formułowane są w postaci praw właściwych systemowi gospodarczemu jako całość, niezależnych od neoklasycznych schematów optymalizacyjnych stanowiących sedno teorii mikroekonomicznej. W nowych modelach zakłada się zatem zachowania optymalizacyjne pojedynczych podmiotów gospodarczych (przedsiębiorstw i gospodarstw domowych), na bazie których formułuje się następnie równania wiążące zmienne ekonomiczne dla systemu gospodarczego traktowanego jako całość. Szeroko rozumiany problem agregacji pojawia się właśnie w związku z owym przejściem z poziomu zachowań pojedynczych podmiotów na poziom wielkości agregatowych i wiążących je równań. W większości modeli tworzonych w tym podejściu, zwłaszcza w modelach wzrostu gospodarczego, modelach realnego cyklu koniunkturalnego i wywodzących się z nich modelach DSGE[2], pojawia się jakaś forma agregacji rezultatów działalności produkcyjnej pojedynczych firm na podstawie dostępnych w gospodarce ilości czynników produkcji, wynikających z decyzji optymalizacyjnych gospodarstw domowych. W przypadku każdego em-

[1] W każdym punkcie czasu gospodarka znajduje się w stanie równowagi ogólnej w sensie Walrasa (ceny zawsze czyszczą rynki).
[2] Dynamic Stochastic General Equilibrium (dynamiczna stochastyczna równowaga ogólna).

pirycznego zastosowania tych modeli wiarygodność formułowanych na ich gruncie wniosków zależy od zasadności założeń, także tych dotyczących agregacji. Pewien szczególny typ badań empirycznych oparty jest na agregatowej funkcji produkcji w sposób bezpośredni. Są to badania określane mianem rachunku wzrostu (*growth accounting*), dotyczące źródeł wzrostu gospodarczego w podziale na akumulację czynników wytwórczych i postęp techniczny, mierzony tzw. ogólną produktywnością czynników (*total factor productivity)*. W pionierskim pod tym względem artykule Solow dowodził, że 87,5% wzrostu produktywności pracy w sektorze przemysłowym w Stanach Zjednoczonych w latach 1909–1949 wynikało z postępu techniczno-organizacyjnego, a jedynie 12,5% z akumulacji kapitału (Solow 1957). Badanie Solowa znalazło wielu naśladowców[3]. Szczególnie głośne na przełomie wieków stały się przeprowadzone według tego schematu badania Younga (1992; 1995) oraz Kim i Lau (1994) nad źródłami wzrostu gospodarczego tzw. tygrysów azjatyckich. Z badań tych miało wynikać, że spektakularny wzrost w tym regionie napędzany był głównie przez przyspieszoną akumulację kapitału, przy niewielkim, jeśli nie zerowym wzroście produktywności. Wyniki tych badań, spopularyzowane przez Krugmana (1997), który przyrównał wschodnioazjatycki cud gospodarczy do dokonań Związku Radzieckiego, uruchomiły szeroką debatę. W ramach niej kwestionowano m.in. sam paradygmat analityczny, według którego badania te zostały przeprowadzone (Felipe 1999; 2000; Felipe i McCombie 2003). Wykorzystując nieco odmienne, choć również oparte na agregatowej funkcji produkcji podejście, Mankiw, Romer i Weil (1992) przeprowadzili zakrojone na szeroką skalę analizy, obejmujące grupę ponad 100 krajów, uwzględniając, obok kapitału fizycznego i pracy, kapitał ludzki.

Z powyższego wynika jasno, że kwestia agregacji ma dla współczesnej makroekonomii znaczenie fundamentalne. Tymczasem nietrudno zgodzić się z opinią niedawno wyrażoną przez Kirmana, że na gruncie głównego nurtu makroekonomii problem agregacji nie został w istocie rozwiązany i jest on jedynie traktowany tak, jak gdyby został rozwiązany (Kirman 2010, 508). Długa historia rozważań nad problemem agregacji w odniesieniu do funkcji produkcji, rozpoczęta w drugiej połowie lat 40. XX wieku na łamach znanego amerykańskiego czasopisma *Econometrica* i trwająca do dziś dyskusja nad jego znaczeniem dla makroekonomii w kontekście nowych zastosowań teoretycznych bądź empirycznych koncepcji agregatowej funkcji produkcji, mogą skłaniać do przypuszczenia, że w tej kwestii nie wszystko jeszcze zostało powiedziane. W niniejszym artykule nie zamierzamy dokonywać pełnego przeglądu wszystkich wątków tej dyskusji. Dość obszerny i całościowy przegląd można znaleźć np. w Felipe i Fisher (2003). Na tle ustaleń literaturowych zwracamy w nim natomiast uwagę na pewne fundamentalne kwe-

[3] Przegląd najważniejszych wyników tych badań dla różnych krajów można znaleźć w: Barro i Sala-i-Martin (1995) szczególnie Tabela 10.8.

stie, które, zdaniem autora, w literaturze nie zostały zbyt dokładnie wyjaśnione. Plan dalszych rozważań jest następujący. W punkcie drugim, podążając za Felipem i Fisherem (2003), wyjaśniamy związek koncepcji agregatowej funkcji produkcji z koncepcją walrasowskiej równowagi ogólnej w gospodarce. W tym kontekście stawiamy pytanie, jaki obraz działalności produkcyjnej na poziomie pojedynczych firm kryje się za koncepcją agregatowej funkcji produkcji o stałych przychodach względem skali, stanowiącej centralny element konstrukcyjny wielu modeli makroekonomicznych oraz podstawę większości badań empirycznych nad źródłami wzrostu gospodarczego. Uzasadniamy, że prezentowane najczęściej w literaturze wyjaśnienie tej kwestii, w którym zakłada się, że mikroekonomiczne funkcje produkcji dla poszczególnych firm cechują się stałymi przychodami względem skali, uwikłane jest w istotne problemy interpretacyjne[4]. W punkcie trzecim wyjaśniamy szczegółowo, jak w logicznie spójny sposób można odpowiedzieć na postawione pytanie odwołując się do koncepcji U-kształtnych krzywych kosztów przeciętnych pojedynczych firm[5]. Analiza prowadzona jest najpierw w kategoriach gospodarki jednosektorowej, w której wytwarza się jednorodny produkt z użyciem homogenicznych nakładów czynników produkcji. W kategoriach takiej właśnie gospodarki sformułowana jest większość modeli makroekonomicznych. W punkcie czwartym uogólniamy rozważania na gospodarkę wielosektorową. Wyjaśniamy nowe problemy i potrzebę przyjmowania dodatkowych założeń, jakie dla koncepcji agregatowej funkcji produkcji stwarza konieczność agregowania produkcji różnych dóbr.

Literatura na temat problemu agregacji jest dość rozproszona, stąd rozważania tutaj podjęte mają zasadniczo walor porządkujący. Korzystamy z niej jednak w sposób wybiórczy, całość wywodu podporządkowana jest bowiem głównemu celowi, a więc teoretycznej rekonstrukcji mikroekonomicznych założeń leżących u podstaw agregatowej funkcji o stałych przychodach względem skali. Artykuł ma zasadniczo charakter krytyczno-przeglądowy, przywołuje i systematyzuje rozproszone w różnych pracach ustalenia oraz uzupełnia je w kilku punktach wynikami własnymi, jak dowody wyróżnionych w tekście twierdzeń.

2. Problemy z agregacją

Według Felipe'a i Fishera (2003) jednym z pierwszych ekonomistów, którzy systematycznie podjęli problem warunków istnienia agregatowej funkcji produkcji, był Klein (1946a; 1946b). Klein rozważał możliwość skonstruowania indeksów agregujących wielkości produktu wytwarzane przez pojedyncze firmy oraz wiel-

[4] Zwrócenie uwagi na ten problem autor zawdzięcza recenzentowi swojej pracy doktorskiej, Profesorowi Emilowi Pankowi z Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu. Uwagi Profesora stały się bezpośrednią inspiracją do napisania tego artykułu

[5] Idea ta pochodzi od Solowa (1956). W tej sprawie, zob. część 2, s. 148.

kości zatrudnianych przez nie nakładów czynników produkcji w taki sposób, aby pozwalały na określenie funkcyjnej relacji między indeksem globalnej produkcji a indeksami globalnych nakładów czynników niezależnie od sposobu, w jaki nakłady te są rozdystrybuowane pomiędzy poszczególne firmy. Jeśli ograniczymy się do dwóch czynników produkcji, kapitału i pracy, problem Kleina można sformułować następująco: pod jakimi warunkami i w jaki sposób dla danych funkcji produkcji poszczególnych firm, $Y_i = f_i(K_i, L_i)$, dla $i = 1, 2, ..., M$, można skonstruować funkcje (indeksy) agregujące produkt, kapitał i pracę, $Y = g^Y(Y_1, Y_2, ..., Y_M)$, $K = g^K(K_1, K_2, ..., K_M)$, $L = g^L(L_1, L_2, ..., L_M)$, tak, że indeksy te są powiązane relacją funkcyjną:

$$g^Y(Y_1, Y_2, ..., Y_M) = F\left(g^K(K_1, K_2, ..., K_M), g^L(L_1, L_2, ..., L_M)\right)$$

lub krótko:

$$Y = F(K, L).$$

Nie jest tutaj istotne, czy kapitał i praca zużywane przez poszczególne firmy oraz wytwarzany przez nie produkt są fizycznie jednorodne, czy nie. Ważne jest, że warunki, o które pyta Klein, dotyczą jedynie własności pojedynczych funkcji produkcji f_i, a samo rozwiązanie problemu agregacji ma być niezależne od jakichkolwiek innych założeń o funkcjonowaniu gospodarki, w tym założeń behawioralnych dotyczących zachowań optymalizacyjnych poszczególnych firm. Innymi słowy, agregatowa funkcja produkcji ma obrazować możliwości produkcyjne dla całej gospodarki, wywiedzione z dostępnych technik produkcji pojedynczych firm danych przez mikroekonomiczne funkcje produkcji, i analogicznie do tych ostatnich ma być relacją czysto techniczną.

Warunki istnienia rozwiązania problemu Kleina podał Nataf (1948)[6]. Przyjmijmy dla uproszczenia, że wszystkie firmy wytwarzają ten sam rodzaj produktu. Możemy zatem zdefiniować produkt globalny jako sumę produkcji poszczególnych firm,

$$Y = g^Y(Y_1, Y_2, ..., Y_M) = \sum_{i=1}^{M} Y_i.$$

Agregatowa funkcja produkcji istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja produkcji każdej firmy jest addytywnie separowana względem kapitału i pracy, czyli każda f_i jest postaci:

$$f_i(K_i, L_i) = \phi_i(K_i) + \psi_i(L_i), \qquad i = 1, 2, ..., M. \tag{1}$$

Wtedy $Y = F(K, L) = K + L$, gdzie $K = g^K(K_1, K_2, ..., K_M) = \sum_{i=1}^{M} \phi_i(K_i)$

[6] Twierdzenie Natafa podajemy za: Felipe i Fisher (2003, 225).

$$\text{oraz } L = g^L(L_1, L_2, ..., L_M) = \sum_{i=1}^{M} \psi_i(L_i).$$

W przypadku, gdy wszystkie firmy zatrudniają jeden i ten sam rodzaj pracy oraz jeden i ten sam rodzaj kapitału, naturalnym sposobem agregacji kapitału i pracy jest proste sumowanie po wszystkich firmach, czyli

$$L = \sum_{i=1}^{M} L_i \text{ oraz } K = \sum_{i=1}^{M} K_i.$$

Jeśli tego będziemy wymagać od funkcji agregujących kapitał i pracę, g^K i g^L, warunek nałożony na funkcje produkcji pojedynczych firm w równaniu (1) przyjmuje jeszcze bardziej restrykcyjną postać. Wtedy $\phi_i(K_i) = bK_i$ oraz $\psi_i(L_i) = cL_i$, przy czym stałe b i c są takie same dla wszystkich firm.

Ograniczenia nałożone na mikroekonomiczne funkcje produkcji, umożliwiające ich agregację zgodnie z podejściem Kleina, okazały się tak restrykcyjne, że czynią koncepcję agregatowej funkcji produkcji w zasadzie bezużyteczną zarówno z teoretycznego, jak i empirycznego punktu widzenia. Alternatywne podejście do problemu agregacji funkcji produkcji, dziś powszechnie przyjmowane, zaprezentowali po raz pierwszy Pu (1946) i May (1946; 1947). May przekonująco argumentował, iż problem agregacji został postawiony przez Kleina w niewłaściwy sposób. Możliwości produkcyjne gospodarki zależą bowiem nie tylko od możliwości produkcyjnych poszczególnych firm (odzwierciedlonych w ich funkcjach produkcji), ale także od sposobu, w jaki te możliwości są wykorzystywane, określonego przez uwarunkowania socjoekonomiczne odzwierciedlone w równaniach behawioralnych i parametrach instytucjonalnych (May 1947, 63). Jak po 20 latach wyjaśniał Fisher (1969, 556), podejmujący na nowo problematykę agregacji zgodnie z podejściem Pu i Maya, funkcja produkcji na dowolnym poziomie agregacji nie opisuje po prostu poziomu produktu osiągalnego przy danych nakładach czynników, gdyż poziom ten nie jest określony jednoznacznie, lecz raczej maksymalny poziom produktu osiągalny przy założeniu, że dane nakłady czynników zostały rozdystrybuowane pomiędzy poszczególne firmy w efektywny sposób. Dopóki istnieje ściśle określony wzorzec dystrybucji dostępnych w gospodarce czynników produkcji między poszczególnymi firmami, dopóty istnieje ściśle określony poziom globalnej produkcji. Na czym polega operacjonalizacja tej idei w praktycznym zastosowaniu, gdy autorzy ci przechodzą do konstrukcji konkretnych zdezagregowanych modeli równowagi ogólnej, w ramach których wyprowadzana jest agregatowa funkcja produkcji? Zawsze wówczas ten ściśle określony wzorzec dystrybucji wynika po prostu z tego, że firmy, działające w warunkach doskonale konkurencyjnych i akceptujące ceny rynkowe, zatrudniają czynniki produkcji zgodnie z warunkami maksymalizacji zysku, zrównującymi wartość ich produktów krańcowych z rynkowymi cenami czynników.

Załóżmy, za Pu (1946, 300−301)[7], że w gospodarce funkcjonuje M firm, wytwarzających jednorodny produkt przy użyciu jednorodnych zasobów kapitału i pracy. Firmy mogą mieć dostęp do różnych technik produkcji. Niech:

$$Y_i = f_i(K_i, L_i), \qquad i = 1, \ldots, M, \tag{2}$$

oznacza funkcję produkcji i-tej firmy, gdzie Y_i, K_i, i L_i i oznaczają, odpowiednio, produkcję, nakłady kapitału i nakłady pracy i-tej firmy. Agregując nakłady kapitału i pracy w „naturalny" sposób, czyli poprzez ich sumowanie, mamy:

$$\sum_{i=1}^{M} K_i = K, \qquad \sum_{i=1}^{M} L_i = L. \tag{3}$$

Równania (3) można też interpretować jako warunki równowagi na rynkach czynników produkcji, zrównujące łączne zużycie wszystkich firm (globalny popyt) z dostępnymi zasobami tych czynników (globalna podaż).

Działające w warunkach doskonale konkurencyjnych i maksymalizujące zyski firmy zatrudniają kapitał i pracę w takich ilościach, że spełnione są równania:

$$\frac{\partial f_i(K_i, L_i)}{\partial K_i} = r, \quad \frac{\partial f_i(K_i, L_i)}{\partial L_i} = w, \qquad i = 1, \ldots, \mathrm{M}, \tag{4}$$

gdzie r, w oznaczają realne (mierzone w jednostkach produktu) ceny kapitału i pracy.

Równania (2)–(4) tworzą prosty system równowagi ogólnej w gospodarce doskonale konkurencyjnej złożonej z M firm. Mamy tutaj $3M + 2$ równań i tyle samo zmiennych, nie licząc K i L. Zakładamy, że dla każdego K i L istnieje jednoznacznie określony wektor wartości zmiennych $[Y_i, K_i, L_i, w, r]$ spełniających równania systemu (stan równowagi ogólnej). Oznaczmy przez Y sumę produktu wszystkich firm,

$$Y = \sum_{i=1}^{M} Y_i .$$

Możemy zatem zdefiniować funkcję przyporządkowującą globalnym zasobom kapitału i pracy globalną wielkość produktu w stanie równowagi ogólnej, $Y = F(K, L)$, czyli agregatową funkcję produkcji. Nietrudno pokazać, że zachodzą następujące równania (zob. Pu 1946, 301):

[7] W opisie modelu agregacji przedstawionego przez Pu dokonujemy pewnych modyfikacji pod kątem dalszych rozważań w artykule, nie zmieniając jednak podstawowej idei tego modelu.

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = r, \ \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = w,$$

czyli warunki maksymalizacji zysku dla poszczególnych firm (4) zostają przeniesione na poziom całej gospodarki traktowanej jak jedno wielkie przedsiębiorstwo.

Akceptując podejście Maya i Pu, kilkoro innych autorów w późniejszych latach badało warunki istnienia agregatowej funkcji produkcji w przypadkach, gdy uchyli się założenie o jednorodności kapitału, pracy i/lub produktu. Szczególnie znaczący wkład w ustalenie tych warunków wniosły prace Fishera, zebrane w Fisher (1993), rozwijane potem przez Blackorby'ego i Schworma (1984; 1988). Poglądowy przegląd tych badań i osiągniętych rezultatów można znaleźć w Felipe i Fisher (2003). W tym miejscu podkreślimy tylko dwie ogólne kwestie. Pierwsza jest istotna z punktu widzenia dalszych rozważań. Większość warunków istnienia agregatowej funkcji produkcji, które ustalono w tych pracach, sformułowana jest przy założeniu, że funkcje produkcji pojedynczych firm są liniowo jednorodne. Inaczej mówiąc, możliwość dokonania agregacji silnie zależy od istnienia stałych przychodów względem skali w odniesieniu do mikroekonomicznych funkcji produkcji. Po drugie, wyniki tych badań dla koncepcji agregatowej funkcji produkcji okazały się bardzo niepomyślne, w tym sensie, że warunki, które muszą być spełnione, aby można było dokonać agregacji, są tak restrykcyjne, że trudno spodziewać się, by miały cokolwiek wspólnego z rzeczywistymi procesami produkcyjnymi. Sugestywnie podsumował rezultaty tych badań Temple: „Rozsądna interpretacja wyników tych badań jest taka, że agregatowa funkcja produkcji – oraz inne wielkości zagregowane, takie jak kapitał, inwestycje i nakłady pracy – nie mogą być sensownie zdefiniowane w żadnych okolicznościach stosujących się do rzeczywistych gospodarek. Odnosi się to również do produktów marginalnych oraz elastyczności substytucji czynników wytwórczych. Mówiąc wprost, wielkości te nie istnieją" (Temple 2006, 302). Jak zauważył Fisher (1987, 55), nie zniechęciło to jednak makroekonomistów do używania agregatowych funkcji produkcji zarówno w ich pracy teoretycznej, jak i empirycznej[8].

Zwróćmy uwagę na pewną istotną własność agregatowych funkcji produkcji konstruowanych zarówno przez Maya i Pu, jak również przez wszystkich późniejszych, akceptujących ich podejście autorów prac poświęconych problemowi agregacji. We wszystkich tych pracach analiza rozpoczyna się od założenia, że w gospodarce funkcjonuje dana liczba firm o danej technologii produkcji (funkcjach produkcji). Konstruowane w taki sposób agregatowe funkcje produkcji istnieją jedynie dla danego zbioru firm dysponujących daną technologią produkcji. Jakakolwiek zmiana w tym zbiorze skutkuje w ogólnym przypadku unieważnie-

[8] Renesans neoklasycznej teorii wzrostu gospodarczego (określany nową teorią wzrostu lub teorią wzrostu endogenicznego) pod koniec XX wieku potwierdził w szczególny sposób tę tezę.

niem dotychczasowej relacji między globalnymi nakładami i produktem i powstaniem w jej miejsce nowej. Warto podkreślić, że nie chodzi tu o zmianę w zbiorze dostępnych technologii produkcji (mikroekonomicznych funkcji produkcji), lecz wyłącznie o zmianę w zbiorze korzystających z nich firm. Ściśle rzecz biorąc, pojawienie się choćby jednej nowej firmy, która skopiuje technologię którejś z dotychczas działających, zmienia parametry równowagi ogólnej w całej gospodarce, w tym optymalne poziomy produkcji poszczególnych firm. Nic nie gwarantuje wówczas, że globalny poziom produkcji pozostanie taki sam jak przed pojawieniem się nowej firmy, mimo że globalne zasoby kapitału i pracy nie uległy zmianie. Skonstruowana w ten sposób agregatowa funkcja produkcji opisuje jedynie gospodarkę złożoną z danego niezmiennego w czasie zbioru firm. Wydaje się, że jeśli funkcja ta ma stanowić element konstrukcyjny modeli makroekonomicznych opisujących gospodarkę w czasie, lub też być podstawą jakichkolwiek badań empirycznych, potrzebne są jakieś dodatkowe założenia.

Po pierwsze, można założyć, że każda firma ma taką samą, liniowo jednorodną funkcję produkcji (stałe przychody względem skali)[9]. W takim przypadku nie ma znaczenia, czy dane nakłady kapitału i pracy zatrudnia jedna duża, czy dziesięć tysięcy małych firm, czyli liczba działających firm nie ma wpływu na globalną wartość produktu. Taki obraz działalności produkcyjnej na poziomie mikro przedstawia się zazwyczaj w literaturze jako mikroekonomiczne podstawy wszystkich tych zagregowanych modeli gospodarki, w których zakłada się istnienie agregatowej funkcji produkcji o stałych przychodach względem skali. Jak dalej argumentujemy, niesie on jednak ze sobą istotne problemy interpretacyjne i trudno go uznać za zadowalające wyjaśnienie tych kwestii. Alternatywą może być zdefiniowanie takiego modelu równowagi ogólnej, w którym liczba działających firm przy danych globalnych nakładach produkcyjnych jest jakoś zdeterminowana przez założenia o funkcjonowaniu rynku i warunki równowagi rynkowej. W dalszej części artykułu podążamy tym torem rozumowania.

W tym kontekście rozważmy obszerną klasę wszystkich tych modeli makroekonomicznych, w których zakłada się istnienie agregatowej funkcji produkcji o stałych przychodach względem skali. Pierwowzorem był model wzrostu gospodarczego przedstawiony przez Solowa w słynnym artykule z 1956 roku (Solow 1956). Artykuł ten stanowił *de facto* fundament dla tego stylu uprawiania makroekonomii, które dziś określa się mianem podejścia od strony równowagi ogólnej. Stałe korzyści skali agregatowej funkcji produkcji uważane są często za wyraz założenia, że działalność produkcyjna odbywa się w warunkach konkurencji doskonałej. W znanej książce Blauga znajdujemy nawet jednoznaczne stwierdzenie

[9] Przypadek, gdy funkcje produkcji poszczególnych firm są liniowo jednorodne, lecz różnią się między sobą, nie gwarantuje ani wspomnianej stabilności relacji między produktem a nakładami, ani nawet istnienia stanu równowagi ogólnej, dla którego taką relację można jednoznacznie określić.

„W gruncie rzeczy doskonałość konkurencji oznacza, że produkcja odbywa się przy stałych przychodach względem skali; zmienność przychodów względem skali jest nie do pogodzenia z konkurencją doskonałą" (Blaug 2000, 464). Można postawić pytanie, jak ekonomiści, posługujący się tego typu zagregowanymi modelami, bądź też stosujący agregatowe funkcje produkcji o stałych przychodach względem skali w badaniach empirycznych, wyobrażają sobie (lub też powinni sobie wyobrażać) funkcjonowanie takiej konkurencyjnej gospodarki na poziomie pojedynczych firm? W literaturze ta podstawowa kwestia nie została dokładnie wyjaśniona.

W prezentacjach tego zagadnienia zwykle zakłada się, że każda firma ma dostęp do tej samej technologii opisywanej przez liniowo jednorodną funkcję produkcji (zob. np. Barro i Sala-i-Martin 1995, 60–71; Blanchard i Fischer 1990, 48–51; Fernandez, Novales i Ruiz 2009, 126–130). Firmy działające w warunkach doskonałej konkurencji podejmują decyzje o wielkości zatrudnienia kapitału, K, i pracy, L, a tym samym wielkości produkcji na podstawie rynkowej informacji o cenach wytwarzanego produktu i zużywanych czynników (które przyjmują jako dane), rozwiązując zadanie maksymalizacji zysku:

$$\max_{K,\,L}\left\{PF(K,L)-RK-WL\right\},$$

gdzie $F(K, L)$ oznacza funkcję produkcji pojedynczej firmy, P to rynkowa cena produktu, zaś R, W – rynkowe nominalne stawki wynagrodzeń dla kapitału i pracy (ceny kapitału i pracy). Z teorii optymalizacji wiadomo, że jeśli funkcja produkcji F jest silnie wklęsła oraz spełnione są tzw. warunki Inady:

$$\lim_{K\to 0}\frac{\partial F}{\partial K}=\infty,\ \lim_{L\to 0}\frac{\partial F}{\partial L}=\infty,\ \lim_{K\to \infty}\frac{\partial F}{\partial K}=0,\ \lim_{L\to \infty}\frac{\partial F}{\partial L}=0,$$

to dla dowolnych wartości P, R, W powyższe zadanie ma rozwiązanie $\overline{K}>0, \overline{L}>0$, które spełnia warunek:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}=r,\qquad \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}=w, \tag{5}$$

gdzie $r = R/P$, $w = W/P$ to rynkowe realne stawki wynagrodzeń dla kapitału i pracy (ceny kapitału i pracy wyrażone w jednostkach produktu). Przedsiębiorca angażuje zatem czynniki produkcji w takiej ilości $\overline{K},\overline{L}$, aby ich krańcowe produktywności zrównały się z cenami rynkowymi. Po uzmiennieniu r i w równania (5) definiują krzywe popytu pojedynczych firm na czynniki produkcji. Po zsumowaniu tych krzywych dla wszystkich działających firm (w konkurencji doskonałej zakłada się, że jest ich dużo, co gwarantuje brak wpływu pojedynczej firmy na ceny), otrzymuje się rynkowe funkcje popytu na czynniki produkcji, które wespół z rynkowymi funkcjami podaży (bądź egzogenicznie danymi zasobami kapitału i pracy), determinują rynkowe stawki wynagrodzeń. W ten sposób model się domyka i mamy spójny obraz działalności produkcyjnej.

Liniowo jednorodna funkcja produkcji, którą się tutaj zakłada, nie jest jednak funkcją silnie wklęsłą, zatem nie ma gwarancji istnienia rozwiązania zadania maksymalizacji zysku. Aby się o tym przekonać, wróćmy do układu równań (5). Z pozoru może wydawać się, że mamy tutaj dwa równania z dwiema niewiadomymi. Ze względu jednak na liniową jednorodność funkcję produkcji $F(K, L)$ można zapisać w następujący sposób: $F(K, L) = LF(k,1) = Lf(k)$, gdzie $k = K/L$. Wtedy równania (5) są równoważne równaniom:

$$f'(k) = r, \qquad f(k) - kf'(k) = w. \tag{6}$$

Mamy zatem dwa równania z tą samą niewiadomą k. W ogólnym przypadku dla zadanych r i w powyższy układ równań może nie mieć w ogóle rozwiązania. Optymalny stosunek kapitału i pracy $\bar{k}$ dla pojedynczej firmy istnieje tylko wtedy, gdy rynkowe ceny tych czynników pozostają względem siebie w określonej relacji wynikającej z własności funkcji produkcji[10]. Jeśli ceny te jakimś sposobem ustalą się na poziomach spełniających wymaganą relację, to firma powinna zatrudniać kapitał i pracę w określonej proporcji, osiągając przy tym zerowe zyski czyste (co wynika z równań (6)). Nie sposób jednak ustalić dla pojedynczej firmy optymalnej wielkości zatrudnienia tych czynników i optymalnej wielkości produkcji[11]. Nie da się zatem również wyznaczyć funkcji popytu na czynniki produkcji dla pojedynczych firm, a tym samym funkcji popytu rynkowego, nie wiadomo więc, w jaki sposób ustalane są rynkowe stawki wynagrodzeń. W prezentacjach modeli makroekonomicznych[12] zazwyczaj po prostu zakłada się, że rynkowe ceny kapitału i pracy są równe produktom krańcowym tych czynników, uzasadniając to warunkami równowagi w gospodarce konkurencyjnej − jeśli przyjmiemy dla uproszczenia, że globalne zasoby kapitału i pracy są egzogenicznie dane, to dany jest również ich

---

[10] Np. dla funkcji Cobba-Douglasa $K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ układ równań (6) ma postać: $\alpha k^{\alpha-1} = r$, $(1-\alpha)k^{\alpha} = w$. Aby układ ten miał rozwiązanie, musi zachodzić $w = (1-\alpha)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$.

[11] Formalnie nie stanowi to przeszkody w zagregowaniu produkcji poszczególnych firm. Jeśli przez n oznaczymy liczbę firm, a przez L_i wielkość nakładów pracy w i-tej firmie, agregację można przeprowadzić zgodnie z równaniem:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} L_i F(1,k) = F(1,k)\sum_{i=1}^{n} L_i = LF(1,k) = F(L,K).$$

Wyprowadzona w ten sposób agregatowa funkcja produkcji jest po prostu przeskalowaną wersją funkcji produkcji pojedynczych firm.

[12] Zob. np. cytowaną wyżej literaturę.

stosunek $k = K/L$; wtedy ceny kapitału i pracy, r, w, w równowadze konkurencyjnej ustalają się na poziomach spełniających równania (6). Zazwyczaj dodaje się również, że model nie determinuje wielkości produkcji pojedynczych firm. Jednakże przy założeniu, że funkcje produkcji pojedynczych firm cechują się stałymi przychodami względem skali, trudno sobie wyobrazić, jak miałby działać mechanizm rynkowy sprowadzający gospodarkę do takiego stanu równowagi. Ponadto, jak już wspomniano, w tak określonym stanie równowagi, jeśli jakimś sposobem zostanie osiągnięty, nie jest ustalona skala produkcji pojedynczych firm. Nieoznaczona jest także liczba działających firm. Tę samą produkcję globalną może wytwarzać równie dobrze dziesięć tysięcy takich samych małych firm, jak i jedno gigantyczne przedsiębiorstwo. Stawia to pod znakiem zapytania postulat bardzo dużej liczby firm jako warunku doskonałości konkurencji, czyli takiej formy organizacji rynku, w której żadna z firm nie ma wpływu na ceny.

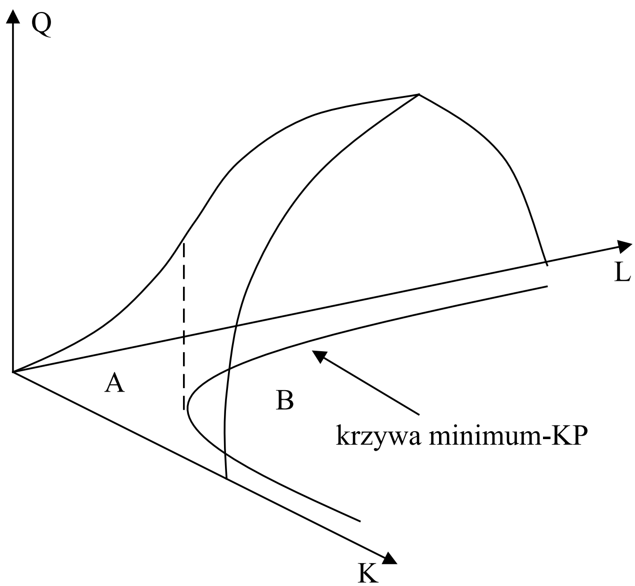
Z powyższych uwag wynika, że taki sposób opisu gospodarki na poziomie mikro, jako uzasadnienie liniowo jednorodnej agregatowej funkcji produkcji oraz kształtowania się cen czynników produkcji na poziomach ich krańcowych produktywności, wydaje się co najmniej niewystarczający. Jak przenikliwie zauważył Blaug (2000, 464), nie bez powodu pierwsi ekonomiści neoklasyczni tworzący teorię przedsiębiorstwa funkcjonującego w warunkach konkurencji doskonałej opierali się myśli o zarzuceniu koncepcji długookresowych krzywych kosztów przeciętnych w kształcie litery U (zamiast płaskich krzywych kosztów odpowiadających funkcji produkcji o stałych przychodach względem skali). Do tej koncepcji odwołuje się również sam Solow w jednym z przypisów w cytowanym już wcześniej artykule. Solow wspomina tam o U-kształtnych krzywych kosztów przeciętnych pojedynczych firm, o tym, że każda firma produkuje przy lokalnie stałym koszcie oraz że zmiany zagregowanej produkcji odbywają się wyłącznie poprzez wejścia −wyjścia identycznych firm o optymalnych rozmiarach (Solow 1956, 79). Przejście z tak scharakteryzowanego poziomu mikro na poziom makro (agregatowej funkcji produkcji) nie zostało nigdzie dokładnie przedstawione, będzie to przedmiotem rozważań w dalszej części artykułu.

Większość modeli makroekonomicznych sformułowana jest przy założeniu, że w gospodarce wytwarza się jednorodny produkt przy użyciu jednorodnych nakładów czynników produkcji. W ten sposób omija się wszystkie problemy związane z koniecznością agregowania różnych rodzajów nakładów i produktu. Postawiony problem analizujemy w kolejnym punkcie w kategoriach takiej właśnie gospodarki. W punkcie 4 przedyskutujemy możliwość uogólnienia na gospodarkę wielosektorową.

3. Konstrukcja agregatowej funkcji produkcji o stałych przychodach względem skali dla gospodarki jednosektorowej

Rozpoczniemy od krótkiego przypomnienia modelowego opisu funkcjonowania firmy w warunkach konkurencji doskonałej, znanego ze wszystkich podręczników do mikroekonomii.

Technologię produkcji firm opisuje dwuczynnikowa funkcja produkcji, $Q = q(K, L)$, która na pewnym obszarze „małych" nakładów (mała skala produkcji) cechuje się rosnącymi efektami skali produkcji, a na obszarze „dużych" nakładów (duża skala produkcji) – malejącymi efektami skali. Aby zagwarantować istnienie jednoznacznego rozwiązania problemu maksymalizacji zysku przez przedsiębiorstwa zakładamy także, że funkcja produkcji jest silnie wklęsła w obszarze malejących efektów skali[13]. Przykładowy wykres takiej funkcji przedstawiono na Rycinie 1.



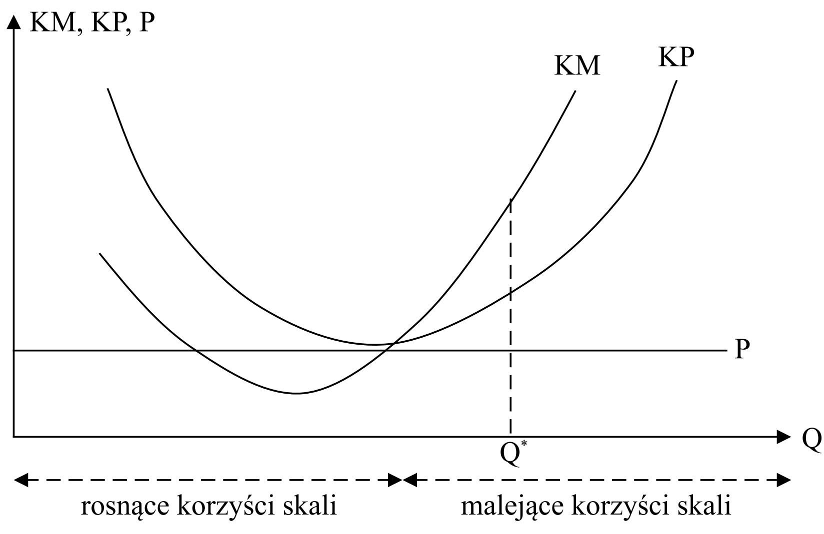
Rycina 1. Funkcja produkcji

Oznaczenia: A – obszar rosnących efektów skali, B – obszar malejących efektów skali
Źródło: opracowanie własne.

Ponieważ w gałęzi przemysłu działa bardzo duża liczba firm wytwarzających jednorodny produkt, pojedyncze firmy nie mają wpływu na ceny. Przy zadanych rynkowych cenach kapitału i pracy funkcja produkcji generuje U-kształtną funkcję kosztów przeciętnych, przyporządkowującą każdej wielkości produkcji minimalny koszt

[13] Dla zagwarantowania istnienia skończonego rozwiązania problemu maksymalizacji zysku powinniśmy także założyć, że spełnione są nierówności: $\lim_{K\to\infty} \frac{\partial q}{\partial K} < r,\ \lim_{L\to\infty} \frac{\partial q}{\partial L} < w.$

jej wytworzenia. Firmy maksymalizują zyski wybierając taką wielkość produkcji, przy której krańcowy koszt jej wytworzenia zrównuje się z ceną rynkową produktu, przy czym zrównanie to zachodzi na rosnącym odcinku kosztu marginalnego. Rosnący odcinek kosztu marginalnego powyżej minimum kosztu przeciętnego stanowi krzywą podaży pojedynczej firmy, a suma krzywych podaży wszystkich firm w gałęzi wyznacza krzywą podaży produktu tej gałęzi. Jednocześnie firmy zatrudniają takie ilości czynników wytwórczych, dla których wartości ich produktów marginalnych (produkt marginalny pomnożony przez cenę produktu) zrównują się z rynkowymi cenami tych czynników. Najczęściej dla prostoty wywodu przyjmuje się, że dana gałąź przemysłu jest na tyle mała w porównaniu z całą gospodarką, że wielkość produkcji tej gałęzi i związane z nią zapotrzebowanie na czynniki wytwórcze nie mają wpływu na rynkowe ceny tych czynników. Cena produktu wytwarzanego w gałęzi ustala się natomiast na poziomie zrównującym podaż produktu tej gałęzi i popyt rynkowy. Dopóki cena produktu znajduje się na takim poziomie, że pozwala na osiąganie przez firmy tzw. czystego zysku (zysku po opłaceniu pracy i kapitału według rynkowych stawek wynagrodzeń), do gałęzi wchodzą nowe firmy, powodując zwiększenie podaży produktu i spadek ceny. W długookresowej równowadze gałęzi przemysłu cena produktu ustala się na poziomie minimum kosztu przeciętnego, a firmy osiągają zerowe zyski czyste[14]. Sytuację tę przedstawiono na Rycinie 2.



Rycina 2. Krzywe kosztów i maksymalizacja zysku przez firmę w długookresowej równowadze gałęzi przemysłu

Oznaczenia: KM – koszt marginalny, KCP – koszt przeciętny, P – cena produktu, Q – wielkość produkcji, Q* − wielkość produkcji przedsiębiorstwa w długookresowej równowadze gałęzi przemysłu (zerowe zyski czyste).
Źródło: opracowanie własne.

[14] Zerowy zysk czysty nie oznacza, że firma nie osiąga zysku księgowego. W koszty ekonomiczne produkcji wliczony jest bowiem tzw. zysk normalny pokrywający koszty alternatywne (koszty utraconych korzyści) zaangażowania pieniędzy i czasu przez prowadzącego przedsiębiorstwo.

Oznaczmy przez $\overline{K}$, $\overline{L}$ oraz $\overline{Q} = Q(\overline{K}, \overline{L})$ takie wielkości kapitału, pracy oraz produkcji pojedynczej firmy, dla których długookresowa krzywa kosztu przeciętnego (przy danych cenach kapitału i pracy, *R*, *W*) osiąga minimum. Nietrudno ustalić, że wielkości $\overline{K}$, $\overline{L}$ oraz $\overline{Q} = Q(\overline{K}, \overline{L})$ zależą od relacji *W* i *R*, a nie od ich bezwzględnych poziomów. Zwiększając *m*-krotnie *W* i *R* uzyskujemy bowiem *m*-krotny wzrost kosztu przeciętnego dla każdego poziomu produkcji, zatem wielkość produkcji, dla której krzywa KP osiąga minimum, nie ulega zmianie. Zdefiniujmy krzywą minimum-KP (minimum kosztu przeciętnego) jako zbiór par $\overline{K}$, $\overline{L}$ odpowiadających różnym relacjom cen czynników wytwórczych *W/R*. W układzie współrzędnych $K \times L$ krzywa minimum-KP stanowi granicę pomiędzy malejącymi i rosnącymi efektami skali produkcji, co pokazano na Rycinie 1.

Rozważmy teraz gospodarkę, w której wytwarza się jednorodny produkt. Ponieważ cała gospodarka stanowi jedną gałąź przemysłu, zmiana wielkości produktu, a tym samym popytu na czynniki produkcji wpływa na ceny tych czynników. Każda firma ma dostęp do tej samej technologii produkcji, danej przez funkcję produkcji o określonych wcześniej własnościach:

$$Q^* = q(K^*, L^*), \tag{7}$$

gdzie Q^* to produkcja, zaś K^*, L^* to nakłady kapitału i pracy zatrudniane przez pojedynczą firmę.

Firmy działające w warunkach konkurencji doskonałej maksymalizują zyski, zatrudniając takie ilości kapitału i pracy, dla których spełnione są równania:

$$\frac{\partial q}{\partial K}(K^*, L^*) = r,\ \frac{\partial q}{\partial L}(K^*, L^*) = w, \tag{8}$$

gdzie $r = R/P$, $w = W/P$ oznaczają realne ceny kapitału i pracy (wyrażone w jednostkach produktu).

Rynki kapitału i pracy znajdują się w równowadze:

$$n \cdot K^* = K, \qquad n \cdot L^* = L, \tag{9}$$

gdzie *n* oznacza liczbę firm w gospodarce, zaś *K*, *L* – globalne zasoby (podaż) kapitału i pracy.

Układ równań (7)–(9) definiuje prosty model równowagi ogólnej, w którym wielkości zmiennych *n*, *K* i *L* są egzogenicznie dane. W równowadze rynkowej ceny realne kapitału i pracy są dane przez

$$r = \frac{\partial q}{\partial K}\left(\frac{K}{n}, \frac{L}{n}\right), w = \frac{\partial q}{\partial L}\left(\frac{K}{n}, \frac{L}{n}\right),$$

a produkcja pojedynczej firmy wynosi

$$Q^* = q(K^*, L^*) = q\left(\frac{K}{n}, \frac{L}{n}\right).$$

Oznaczmy przez Y globalną produkcję w gospodarce:

$$Y = nQ^* = nq\left(\frac{K}{n}, \frac{L}{n}\right).$$

Tak długo, jak zyski czyste są dodatnie, firmy funkcjonują w obszarze malejących efektów skali. Oznacza to, że zachodzi nierówność

$$Y = nq\left(\frac{K}{n}, \frac{L}{n}\right) > q(K, L).$$

Pokazuje to dwie rzeczy. Po pierwsze, w ogólnym przypadku globalna produkcja zależy od liczby działających firm, nie zaś jedynie od globalnych zasobów kapitału i pracy. Po drugie, wraz ze wzrostem liczby działających firm globalna produkcja rośnie (przy danych zasobach kapitału i pracy), zatem gospodarka zużywa dostępne czynniki produkcji efektywniej.

Przyjmujemy teraz założenie o swobodzie wejścia/wyjścia (*free entry & exit*) i traktujemy liczbę działających firm n jako zmienną endogeniczną. Ponieważ nowi potencjalni producenci mają dostęp do tej samej technologii produkcji, nowe firmy będą podejmować działalność produkcyjną dopóty, dopóki zyski czyste są dodatnie. Zatem liczba działających firm rośnie i redukuje proporcjonalnie ilości kapitału i pracy zatrudniane przez każdą pojedynczą firmę (poprzez rosnące realne ceny kapitału i pracy). Proces ten zachodzi dopóty, dopóki firmy działają w obszarze malejących przychodów. Pojedyncza firma przesuwa się wzdłuż promienia określonego przez globalne zasoby kapitału i pracy, K/L, aż do momentu osiągnięcia punktu ($\overline{K}, \overline{L}$) na krzywej minimum-KP, kiedy to zyski czyste spadają do zera. Wówczas liczba firm działających w gospodarce osiąga poziom maksymalny, jako że dalszy ich przyrost sprowadziłby zyski każdej firmy poniżej zera i skłaniał je do zaprzestawania produkcji.

W długookresowej równowadze konkurencyjnej w gospodarce każda firma funkcjonuje na krzywej minimum-KP osiągając zerowe zyski czyste. Oznacza to, że spełnione jest równanie:

$$wL^* + rK^* = q(L^*, K^*). \tag{10}$$

Definicja 1. Stanem długookresowej równowagi konkurencyjnej w gospodarce przy danych globalnych zasobach kapitału K i pracy L nazywamy wektor $V = \left[K^*, L^*, Q^*, n, w, r\right]$ spełniający układ równań (7)–(10).

Z równań (8)–(10) wynika, że w długookresowej równowadze konkurencyjnej funkcjonuje taka liczba firm n, że dla danych zasobów K i L zachodzi następujące równanie:

$$\frac{\partial q}{\partial K}\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right)\cdot\frac{K}{n}+\frac{\partial q}{\partial L}\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right)\cdot\frac{L}{n}=q\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right). \tag{11}$$

Przy przyjętych założeniach o funkcji produkcji pojedynczych firm n będące rozwiązaniem powyższego równania jest określone jednoznacznie[15]. Wtedy n oraz pozostałe zmienne w wektorze V są funkcjami globalnych zasobów kapitału i pracy, K i L.

Definicja 2. Agregatową funkcją produkcji nazywamy funkcję, która każdemu wektorowi globalnej podaży kapitału i pracy przyporządkowuje globalną wielkość produkcji w równowadze długookresowej w gospodarce, $Y = F(K, L)$.
Udowodnimy teraz trzy istotne własności agregatowej funkcji produkcji.

Twierdzenie 1. Agregatowa funkcja produkcji wyznacza maksymalną możliwą wielkość globalnej produkcji przy danych globalnych zasobach kapitału i pracy.
Dowód. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że przy danych globalnych zasobach kapitału K i pracy L w gospodarce możliwe jest wytworzenie większej produkcji, niż to wynika z agregatowej funkcji produkcji. Oznaczmy nowy maksymalny poziom globalnej produkcji przez Y', przy czym $Y' > F(K, L)$[16]. Wtedy jednak firmy znajdują się poza krzywą minimum-KP w obszarze malejących przychodów względem skali. Redukcja nakładów kapitału i pracy w każdej firmie o czynnik $\lambda > 1$ prowadzi do zmniejszenia produkcji każdej firmy o czynnik $\kappa > 1$, przy czym $\kappa < \lambda$. Dla pełnego wykorzystania zasobów kapitału i pracy w gospodarce liczba firm musi wzrosnąć o czynnik λ. Zatem globalna wielkość produkcji rośnie o czynnik $\lambda / \kappa > 1$, co prowadzi do sprzeczności z założeniem dowodu nie wprost.

---

[15] Zwracamy uwagę, że nie jest to konieczne dla zagwarantowania istnienia agregatowej funkcji produkcji. Jeśli zamiast krzywej minimum-KP przyjęlibyśmy, że funkcja produkcji pojedynczej firmy cechuje się stałymi przychodami względem skali w pewnym obszarze między rosnącymi i malejącymi efektami skali, to wówczas zamiast pojedynczej wartości n mielibyśmy cały zakres n spełniających równanie (8). Ale ze względu na stałe przychody względem skali globalna produkcja w całej gospodarce byłaby ta sama dla wszystkich n należących do wspomnianego zakresu. Zatem dla danych K i L wciąż byłaby określona jednoznacznie.

Dla ścisłości powinniśmy zaznaczyć, że zdefiniowana tutaj agregatowa funkcja produkcji nie jest funkcją ciągłą. Ponieważ n musi być liczbą całkowitą, agregatowa funkcja produkcji jest nieciągła w przypadku zmian globalnej produkcji mniejszych niż produkcja optymalna pojedynczej firmy. Jednak w analizach długookresowych, w których funkcja produkcji zazwyczaj jest używana, oraz wobec założenia istnienia bardzo dużej liczby firm, fakt ten można zignorować.

[16] Taki maksymalny poziom produkcji musi istnieć, gdyż przy skończonych zasobach czynników produkcji nie da się osiągnąć nieskończonego poziomu produkcji (postulat braku rogu obfitości).

Twierdzenie 2. Agregatowa funkcja produkcji jest liniowo jednorodna, czyli $F(\xi K, \xi L) = \xi F(K, L)$, dla każdego $\xi > 0$.

Dowód. Załóżmy, że $K' = \xi K, L' = \xi L$. Ponieważ gospodarka znajduje się w (nowym) stanie długookresowej równowagi konkurencyjnej, liczba działających firm n' spełnia równanie:

$$\frac{\partial q}{\partial K}\left(\frac{\xi K}{n'}, \frac{\xi L}{n'}\right) \cdot \frac{\xi K}{n'} + \frac{\partial q}{\partial L}\left(\frac{\xi K}{n'}, \frac{\xi L}{n'}\right) \cdot \frac{\xi L}{n'} = q\left(\frac{\xi K}{n'}, \frac{\xi L}{n'}\right),$$

dla danych *K*, *L* oraz ξ.

Przyjmijmy $\bar{n} = n'/\xi$. Możemy teraz zapisać powyższe równanie w następującej postaci:

$$\frac{\partial q}{\partial K}\left(\frac{K}{\bar{n}}, \frac{L}{\bar{n}}\right) \cdot \frac{K}{\bar{n}} + \frac{\partial q}{\partial L}\left(\frac{K}{\bar{n}}, \frac{L}{\bar{n}}\right) \cdot \frac{L}{\bar{n}} = q\left(\frac{K}{\bar{n}}, \frac{L}{\bar{n}}\right).$$

Porównując to równanie z (5), wnioskujemy, że $\bar{n} = n$. Zatem $n' = \xi n$.

Dla *K*, *L* globalna produkcja wynosiła $Y = F(K, L) = nq\left(\frac{K}{n}, \frac{L}{n}\right)$. Teraz zaś, dla $\xi K, \xi L$ wynosi:

$$Y' = F(\xi K, \xi L) = n' q\left(\frac{\xi K}{n'}, \frac{\xi L}{n'}\right) = \xi nq\left(\frac{\xi K}{\xi n}, \frac{\xi L}{\xi n}\right) = \xi nq(\frac{K}{n}, \frac{L}{n}) = \xi F(K, L),$$

co kończy dowód Własności 2.

Pokazuje to również, że w rozważanej gospodarce zmiana skali produkcji wywołana proporcjonalną zmianą zasobów kapitału i pracy odbywa się poprzez zmianę liczby działających firm, nie zaś wskutek zmian produkcji pojedynczych firm.

Twierdzenie 3. Pochodne pierwszego rzędu agregatowej funkcji produkcji (produkty marginalne kapitału i pracy) są równe rynkowym cenom czynników produkcji:

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K, L) = r, \ \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) = w.$$

Dowód. Ponieważ agregatowa funkcja produkcji *F(K,L)* jest liniowo jednorodna, jej pochodne cząstkowe są dodatnio jednorodne stopnia 0. Stąd:

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K, L) = \frac{\partial F}{\partial K}\left(\frac{K}{n}, \frac{L}{n}\right), \qquad \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) = \frac{\partial F}{\partial L}\left(\frac{K}{n}, \frac{L}{n}\right), \tag{12}$$

dla dowolnego $n > 0$. Niech $n = n(K, L)$ oznacza liczbę firm w równowadze długookresowej dla danych *K* i *L*. Wtedy

$$F(K,L) = nq\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right),$$

dla dowolnych K i L. Jednocześnie, ze względu na liniową jednorodność funkcji *F(K,L)*, mamy:

$$F(K,L) = nF\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right),$$

dla dowolnych K i L. Zatem:

$$F\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right) = q\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right).$$

Ponieważ równanie to zachodzi dla dowolnych K i L, mamy również:

$$\frac{\partial F}{\partial K}\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right) = \frac{\partial q}{\partial K}\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right) \text{ oraz } \frac{\partial F}{\partial L}\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right) = \frac{\partial q}{\partial L}\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right).$$

Stąd oraz z (12) wynika, że:

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K,L) = \frac{\partial q}{\partial K}\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right) \text{ oraz } \frac{\partial F}{\partial L}(K,L) = \frac{\partial q}{\partial L}\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right).$$

Ponieważ $\frac{\partial q}{\partial K}\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right) = r$, $\frac{\partial q}{\partial L}\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right) = w$,

otrzymujemy: $\frac{\partial F}{\partial K}(K,L) = r$, $\frac{\partial F}{\partial L}(K,L) = w$.

Agregatowa funkcja produkcji jest styczna do mikroekonomicznej funkcji produkcji (dla n=1), przy czym zbiorem punktów styczności jest krzywa minimum-KP.

W przedstawionym tutaj modelu gospodarki założyliśmy, że funkcje produkcji wszystkich firm są takie same. Założenie to wydaje się kluczowe dla uzyskanych wyników (istnienia agregatowej funkcji produkcji o stałych przychodach względem skali). Jeśli firmy mają różne krzywe kosztów, to w równowadze tylko firma(-y) marginalna(-e) funkcjonuje(-ą) na poziomie minimum kosztu przeciętnego, czyli na krzywej minimum-KP, a firmy o niższych kosztach osiągają zyski czyste. Jeśli jednak wiedza o technikach produkcji jest ogólnie dostępna, to firmy osiągające mniejsze zyski czyste będą naśladować bardziej efektywne techniki produkcji innych firm. Ostatecznie wszystkie działające firmy wykorzystywałyby tę samą funkcję produkcji, doprowadzając gospodarkę do takiego stanu równowagi długookresowej, jaki zdefiniowaliśmy w naszym modelu. Jeśli zaś wiedza o technikach produkcji ogólnie dostępna nie jest i funkcje produkcji poszczególnych firm różnią się między sobą, to określony stan równowagi długookresowej w gospodarce i agregatowa funkcja produkcji istnieją jedynie dopóty, dopóki w zbiorze działających firm i ich technologiach produkcji nie zachodzą żadne zmiany. Ściśle rzecz biorąc, pojawienie się choćby jednej nowej firmy, która skopiuje technologię którejś z działających dotychczas firm, zmienia parametry równowagi długookresowej w całej gospodarce, w tym optymalne poziomy produkcji poszczególnych firm. Nic nie gwarantuje wówczas, że globalny poziom produkcji pozostanie taki sam, jak przed pojawieniem się nowej firmy, pomimo że globalne zasoby kapitału i pracy nie uległy zmianie. Możemy zatem mówić o agregatowej funkcji produkcji dla danego zbioru firm dysponujących taką, a nie inną technologią produkcji, jednak taka funkcja produkcji z pewnością nie jest liniowo jednorodna. Podsumowując, założenie o powszechnej dostępności wiedzy technologicznej o dostępnych w gospodarce procesach produkcji jest konieczne dla uzasadnienia istnienia agregatowej funkcji produkcji o stałych przychodach względem skali.

4. Agregatowa funkcja produkcji dla gospodarki wielosektorowej

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że w gospodarce wytwarzany jest jeden rodzaj produktu. Powstaje pytanie, czy model można uogólnić i wyprowadzić agregatową funkcję produkcji dla gospodarki, w której wytwarza się wiele różnych rodzajów dóbr? Mówiąc o agregatowej funkcji produkcji dla gospodarki wieloproduktowej, chcielibyśmy w równaniu $Y = F(K, L)$ móc interpretować Y jako pewien agregat różnego rodzaju dóbr wytwarzanych w całej gospodarce, którego poziom jest jednoznacznie zdeterminowany przez strumienie usług globalnych zasobów kapitału i pracy. W jaki sposób ten agregat może być skonstruowany?

W badaniach empirycznych do agregowania strumieni produktów i usług wytwarzanych w gospodarce w pewnym przedziale czasu używa się po prostu cen rynkowych. Jeśli agregację przeprowadza się dla różnych okresów, stosuje się ceny stałe z wybranego okresu (bazowego), a zmiany tak obliczonego agregatu określa jako zmiany realnego produktu i interpretuje jako zmiany fizycznej wielkości produkcji. Procedura ta pozwala jakoś odseparować zmiany fizycznej produkcji od zmian cen, nie zmienia to jednak faktu, że wciąż porównuje się dwie wielkości ujęte wartościowo (wartości produkcji), nie zaś domniemane fizyczne rozmiary produktu. W istocie nic takiego jak jednorodna fizyczna wielkość produktu globalnego nie istnieje, co stawia pod znakiem zapytania nie tylko istnienie agregatowej funkcji produkcji dla faktycznych gospodarek, ale też sam sens takiej koncepcji. Niemniej jednak warto zauważyć, że z punktu widzenia agregatowej funkcji produkcji tak naprawdę nie jest istotne, w jakich jednostkach jest mierzony i w jaki sposób skonstruowany agregat „globalnej produkcji", a jedynie to, czy i przy jakich założeniach wielkość tego agregatu jest jednoznacznie zdeterminowana przez wielkości ujęte z prawej strony równania produkcji jako argumenty funkcji (strumienie usług globalnych zasobów kapitału i pracy).

Aby rozważyć ten problem, uogólniamy nasz model równowagi ogólnej na gospodarkę, w której wytwarza się *M* różnych dóbr w *M* oddzielnych sektorach produkcyjnych, z których każdy funkcjonuje tak, jak gospodarka opisana w części 3. Produkcja *i*-tego dobra w pojedynczej firmie działającej w *i*-tym sektorze gospodarki odbywa się zgodnie z funkcją produkcji:

$$Q_i^* = q_i(K_i^*, L_i^*), \qquad i = 1,...,M, \tag{13}$$

o określonych wcześniej własnościach. Oznaczymy przez n_i liczbę firm działających w *i*-tym sektorze. Jeśli przez n_i oznaczymy liczbę firm działających w *i*-tym sektorze, to globalna produkcja *i*-tego dobra, Q_i, jest dana przez:

$$Q_i = n_i Q_i^*, \qquad i = 1,...,M. \tag{14}$$

Utrzymujemy założenie o jednorodności kapitału i pracy w całej gospodarce, zatem każda firma działająca w dowolnym sektorze przyjmuje w swoim rachunku optymalizacyjnym te same ceny rynkowe (nominalne stawki wynagrodzeń) kapitału *R* i pracy *W*. Oznaczmy przez P_i cenę rynkową *i*-tego dobra wytwarzanego w *i*-tym sektorze. Firmy maksymalizują zyski, zatrudniając takie wielkości kapitału i pracy, że zachodzą równania:

$$P_i \frac{\partial q_i(K_i^*, L_i^*)}{\partial K_i^*} = R, \quad P_i \frac{\partial q_i(K_i^*, L_i^*)}{\partial L_i^*} = W, \qquad i = 1,...,M. \tag{15}$$

Rynki kapitału i pracy znajdują się w równowadze:

$$\sum_{i=1}^{M} n_i K_i^* = K, \qquad \sum_{i=1}^{M} n_i L_i^* = L, \tag{16}$$

gdzie *K*, *L* oznaczają, jak dotąd, globalną podaż kapitału i pracy.

Przy założeniu *free entry & exit* do danej gałęzi wchodzą nowe firmy dopóty, dopóki zyski czyste są dodatnie. W długookresowej równowadze konkurencyjnej w każdej gałęzi funkcjonuje taka liczba firm n_i, że każda z nich osiąga zerowe zyski czyste. Oznacza to, że przedsiębiorstwa znajdują się na swoich krzywych minimum-KP oraz spełnione są równania:

$$WL_i^* + RK_i^* = P_i Q_i^*, \qquad i = 1,...,M. \tag{17}$$

Sumując równania (17) dla wszystkich sektorów gospodarki oraz wszystkich firm w ramach poszczególnych sektorów, otrzymujemy równanie podziału dochodu:

$$WL + RK = \sum_{i=1}^{M} P_i Q_i, \tag{18}$$

czyli cała wartość produkcji rozkłada się na wynagrodzenia dla pracy i kapitału.

System równowagi ogólnej określony równaniami (13)–(17) nie jest jeszcze kompletny. Można się o tym przekonać porównując liczbę równań (4M + 2) z liczbą zmiennych (5M + 4). Dwie zmienne, K i L, traktujemy jako egzogeniczne, zatem wartości pozostałych zmiennych w równowadze będą funkcjami tych dwóch – do tego właśnie zmierzamy. Naturalnym dopełnieniem systemu są funkcje określające popyt rynkowy na poszczególne dobra Q_i^D, dla $i = 1,...,M$, wynikające z maksymalizacji funkcji użyteczności przy zadanym ograniczeniu budżetowym[17]. Nie jest tutaj istotne, czy funkcje te powstają poprzez zsumowanie funkcji popytu indywidualnych podmiotów (gospodarstw domowych), maksymalizujących indywidualne funkcje użyteczności, czy też stanowią rozwiązanie zadania maksymalizacji jakiejś pojedynczej społecznej funkcji użyteczności. Ponieważ w równowadze długookresowej globalne ograniczenie budżetowe przyjmuje postać:

$$\sum_{i=1}^{M} P_i Q_i^D = WL + RK, \tag{19}$$

czyli całość dochodów przeznaczanych na zakup wytworzonych dóbr stanowią wynagrodzenia pracy i kapitału (zyski czyste są zerowe), to funkcje popytu rynkowego mają jako argumenty, oprócz rynkowych cen produktów, ceny kapitału i pracy oraz globalne zasoby tych czynników:

$$Q_i^D = G_i(P_1, P_2, ..., P_M, R, W, K, L), \qquad i = 1,...,M. \tag{20}$$

W równowadze popyt rynkowy na poszczególne dobra jest równy produkcji tych dóbr:

$$Q_i^D = Q_i, \qquad i = 1,...,M. \tag{21}$$

Przy tych warunkach globalne ograniczenie budżetowe (19) jest tożsame z równaniem (18). Ponieważ funkcje popytu rynkowego spełniają łącznie ograniczenie budżetowe (19), to w istocie mamy M-1 zamiast M dodatkowych równań (funkcji popytu rynkowego) niezależnych od pozostałych równań systemu, jedna z funkcji popytu rynkowego wynika bowiem z pozostałych M-1 funkcji popytu i ograniczenia budżetowego. Aby nie mnożyć liczby równań i zmiennych, w ostatecznym zapisie systemu równowagi ogólnej przyjmiemy, że równania równowagi rynkowej na rynkach dóbr (21) są spełnione *implicite* i popyt rynkowy na poszczególne dobra Q_i^D będziemy utożsamiać z produkcją tych dóbr Q_i. Możemy jeszcze wyeliminować jedną zmienną, traktując cenę jednego z dóbr jako *numeraire*. Zamiast bezwzględnych poziomów cen mamy

[17] Zakładamy tutaj, że funkcje użyteczności są ciągłe, rosnące i silnie wklęsłe, co gwarantuje istnienie jednoznacznego rozwiązania zadania maksymalizacji użyteczności leżącego na linii budżetowej.

wówczas ceny względne $w = W / P_1$, $r = R / P_1$, $p_i = P_i / P_1$ (dla $i = 2,...,M$), wyrażone w jednostkach dobra 1[18].

Ostatecznie system równowagi ogólnej przyjmuje postać układu równań:

$$Q_i^* = q_i(K_i^*, L_i^*), \qquad i = 1,...,M, \tag{22}$$

$$Q_i = n_i Q_i^*, \qquad i = 1,...,M, \tag{23}$$

$$p_i \frac{\partial q_i(K_i^*, L_i^*)}{\partial K_i^*} = r, \quad p_i \frac{\partial q_i(K_i^*, L_i^*)}{\partial L_i^*} = w, \qquad i = 1,...,M, \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{M} n_i K_i^* = K, \qquad \sum_{i=1}^{M} n_i L_i^* = L, \tag{25}$$

$$wL_i^* + rK_i^* = p_i Q_i^*, \qquad i = 1,...,M, \tag{26}$$

$$Q_i = g_i(p_2,..., p_M, r, w, K, L), \qquad i = 1,...,M, \tag{27}$$

gdzie $P_1 = 1$, a globalne zasoby kapitału *K* i pracy *L* są egzogenicznie dane.

Definicja 3. Stanem równowagi ogólnej dla danych globalnych zasobów kapitału *K* i pracy *L* nazywamy wektor $\left[K_i^*, L_i^*, Q_i^*, n_i, Q_i, p_2, p_3,..., p_M, w, r\right]$ spełniający układ równań (22)–(27).

Załóżmy, że dla każdego *K* i *L* stan równowagi ogólnej istnieje i jest określony jednoznacznie. Wielkości wszystkich zmiennych w równowadze ogólnej mogą być teraz przedstawione jako funkcje *K* i *L*. W szczególności wielkość produkcji każdego dobra jest jednoznacznie określona przez *K* i *L*, czyli $Q_i = Q_i(K, L)$. Ponieważ również ceny względne poszczególnych dóbr p_i w równowadze ogólnej są funkcjami *K* i *L*, możemy ich użyć do zagregowania produkcji poszczególnych dóbr, otrzymując w rezultacie realną (wyrażoną w jednostkach dobra 1) wartość globalnej produkcji,

$$Y = Q_1 + \sum_{i=2}^{M} p_i Q_i,$$

będącą funkcją *K* i *L*, czyli $Y = F(K, L)$. Skonstruowaliśmy w ten sposób agrega-

[18] Jak wiadomo, funkcje popytu są dodatnio jednorodne stopnia 0 względem cen wszystkich dóbr i dochodu, który w naszym przypadku jest równy *WL* + *RK*. Zatem podzielenie wszystkich cen, łącznie z *W* i *R*, przez P_1, nie zmienia wielkości popytu na poszczególne dobra, co formalnie przedstawia równanie:

$$Q_i^D = G_i(P_1, P_2,..., P_M, R, W, K, L) = G_i(1, P_2 / P_1,..., P_M / P_1, R / P_1, W / P_1, K, L) = g_i(p_2,..., p_M, r, w, K, L).$$

Własność ta jest nazywana brakiem iluzji pieniądza.

tową funkcję produkcji przyporządkowującą globalnym zasobom kapitału i pracy jednoznacznie określoną wielkość globalnej produkcji, na wzór analogicznej funkcji skonstruowanej w części 3 dla gospodarki jednosektorowej. Zauważmy jednak, że w odróżnieniu od tej ostatniej, agregatowa funkcja produkcji zależy teraz nie tylko od funkcji produkcji pojedynczych firm, ale także od funkcji popytu rynkowego na poszczególne dobra, wynikających z określonego systemu preferencji (funkcji użyteczności). Inaczej mówiąc, agregatowa funkcja produkcji istnieje tylko dla danych preferencji konsumpcyjnych i każda zmiana tych ostatnich skutkuje powstaniem nowej agregatowej funkcji produkcji. Podkreślmy przy tym, że nie jest to jedynie konsekwencją faktu, iż do zagregowania produkcji różnych dóbr użyliśmy cen, gdyż wszystkie wielkości w równowadze, w tym wielkości produkcji poszczególnych dóbr, są funkcjami K i L zależnymi od preferencji (funkcji popytu rynkowego).

Choć stwierdzony tutaj fakt może wydawać się na pierwszy rzut oka nieco zaskakujący, w istocie stanowi on jedynie logiczną konsekwencję tego podejścia, które wiąże koncepcję agregatowej funkcji produkcji z koncepcją równowagi ogólnej. W gospodarce wytwarzającej tylko jeden rodzaj produktu, ściśle określony wzorzec dystrybucji, warunkujący istnienie agregatowej funkcji produkcji, wynikał wyłącznie z założeń instytucjonalnych o formie zorganizowania rynku (konkurencja doskonała) i założeń behawioralnych dotyczących zachowań pojedynczych firm (maksymalizacja zysku). W gospodarce wytwarzającej różne dobra ten wzorzec dystrybucji wynika ponadto ze struktury popytu rynkowego (systemu preferencji), współdeterminującego strukturę produkcji poszczególnych dóbr. Jeśli zatem od agregatowej funkcji produkcji oczekiwalibyśmy, że ma być wyrazem samych tylko technicznych uwarunkowań produkcji, to w ogólnym przypadku zadanie konstrukcji takiej funkcji jest niewykonalne: taka agregatowa funkcja produkcji nie istnieje[19]. Fakt ten stanowi problem z punktu widzenia zastosowań koncepcji funkcji produkcji w badaniach empirycznych, choć w modelach teoretycznych gospodarki najczęściej się go omija, przyjmując po prostu, że w gospodarce wytwarza się jednorodny produkt, zatem nie rozważa się *explicite* preferencji co do konsumpcji poszczególnych dóbr. Jeśli jednak modele te mają mówić cokolwiek o funkcjonowaniu rzeczywistych gospodarek, to problemu tego zignorować się nie da.

Akceptując fakt, że agregatowa funkcja produkcji istnieje tylko dla danych preferencji (funkcji użyteczności) i wraz ze zmianą tych preferencji sama ulega zmianie (mamy nową agregatową funkcję produkcji), można zadać pytanie, czy da się powiedzieć cokolwiek o własnościach tak zdefiniowanej funkcji, a zwłaszcza, czy funkcja ta jest liniowo jednorodna. W ogólnym przypadku nic nie gwarantuje takiej własności. Pewne ustalania w tej kwestii są jednak możliwe, jeśli przyj-

[19] Szczególny przypadek, gdy jest to możliwe, rozpatrzymy dalej.

miemy, że system preferencji społecznych jest reprezentowany przez pojedynczą, podlegającą maksymalizacji funkcję użyteczności $U(Q_1, Q_2, ..., Q_M)$. Wówczas równania popytu rynkowego (27) stanowią rozwiązanie zadania maksymalizacji tej funkcji przy ograniczeniu budżetowym danym równaniem (19). Oznacza to, że w stanie równowagi ogólnej funkcja ta osiąga maksymalną wartość przy danych globalnych zasobach kapitału i pracy. Stan równowagi ogólnej możemy teraz zdefiniować w następujący sposób.

Definicja 4. Stanem równowagi ogólnej dla danych globalnych zasobów kapitału *K* i pracy *L* nazywamy taki wektor $\left[K_i^*, L_i^*, Q_i^*, n_i, Q_i, p_2, p_3, ..., p_M, w, r\right]$, spełniający równania (22)–(26), że funkcja użyteczności osiąga wartość maksymalną.

Twierdzenie 4. Jeśli społeczna funkcja użyteczności $U(Q_1, Q_2, ..., Q_M)$ jest liniowo jednorodna, czyli spełnia równanie:

$$U(\lambda Q_1, \lambda Q_2, ..., \lambda Q_M) = \lambda U(Q_1, Q_2, ..., Q_M),$$

dla dowolnego $\lambda > 0$, to wynikająca z niej agregatowa funkcja produkcji charakteryzuje się stałymi przychodami względem skali[20].

Dowód. Niech

$$V^0 = \left[K_i^{*0}, L_i^{*0}, Q_i^{*0}, n_i^0, Q_i^0, p_2^0, p_3^0, ..., p_M^0, w^0, r^0\right],$$

dla $i = 1, ..., M$ oznacza stan równowagi ogólnej dla danych globalnych zasobów kapitału i pracy K^0 i L^0. Oznaczmy przez U^0 odpowiadającą mu wartość funkcji użyteczności

$$U^0 = U(Q_1^0, Q_2^0, ..., Q_M^0) = \max_{K=K^0, L=L^0} U.$$

Pokażemy, że dla λ-krotne większych globalnych zasobów kapitału i pracy $K' = \lambda K^0$, $L' = \lambda L^0$, stanem równowagi ogólnej jest wektor

$$V' = \left[K_i^{*0}, L_i^{*0}, Q_i^{*0}, \lambda n_i^0, \lambda Q_i^0, p_2^0, p_3^0, ..., p_M^0, w^0, r^0\right], \text{ dla } i = 1, ..., M.$$

Jest jasne, że wektor V' spełnia warunki równowagi ogólnej (22)–(26). Oznaczmy odpowiadającą mu wartość funkcji użyteczności przez U'. Z liniowej

[20] Przykładem liniowo jednorodnej funkcji użyteczności jest często stosowana ostatnio w makroekonomicznych modelach typu DSGE funkcja użyteczności typu CES (*constant elasticity of substitution*), postaci: $U(C_1, ..., C_M) = \left(\sum_{i=1}^{M} C_i^{\frac{\eta-1}{\eta}}\right)^{\frac{\eta}{\eta-1}}$, gdzie parametr η oznacza stałą elastyczność substytucji między dowolnymi dwoma dobrami.

jednorodności funkcji użyteczności wynika, że wartość ta jest równa:

$$U' = U(\lambda Q_1^0, \lambda Q_2^0, ..., \lambda Q_M^0) = \lambda U(Q_1^0, Q_2^0, ..., Q_M^0) = \lambda U^0.$$

Pokażemy, że jest to maksymalną możliwa wartość funkcji użyteczności przy danych zasobach kapitału i pracy $K' = \lambda K^0$, $L' = \lambda L^0$.

Załóżmy, że tak nie jest i że istnieje inny wektor

$$V^1 = \left[K_i^{*1}, L_i^{*1}, Q_i^{*1}, n_i^1, Q_i^1, p_2^1, p_3^1, ..., p_M^1, w^1, r^1\right],$$

spełniający równania równowagi ogólnej (22)–(26), któremu odpowiada wartość funkcji użyteczności $U^1 = U(Q_1^1, Q_2^1, ..., Q_M^1)$ większa niż w przypadku wektora V', czyli:

$$U^1 > U' = \lambda U^0. \tag{28}$$

Jeśli teraz zredukujemy globalne zasoby kapitału i pracy oraz liczbę firm i produkcję w każdym sektorze λ-krotnie bez zmiany wartości pozostałych zmiennych, uzyskamy wektor

$$V'' = \left[K_i^{*1}, L_i^{*1}, Q_i^{*1}, \frac{n_i^1}{\lambda}, \frac{Q_i^1}{\lambda}, p_2^1, p_3^1, ..., p_M^1, w^1, r^1\right],$$

również spełniający równania (22)–(26) przy globalnych zasobach kapitału i pracy równych wyjściowym poziomom K^0 i L^0. Ponownie korzystając w własności liniowej jednorodności funkcji użyteczności wnioskujemy, że wartość tej funkcji U'' odpowiadająca wektorowi V'' jest równa:

$$U'' = U\left(\frac{Q_1^1}{\lambda}, \frac{Q_2^1}{\lambda}, ..., \frac{Q_M^1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} U(Q_1^1, Q_2^1, ..., Q_M^1) = \frac{1}{\lambda} U^1.$$

Stąd oraz z (28) wnioskujemy, że zachodzi nierówność $U'' > U^0$, co jest sprzeczne z wyjściowym założeniem, że wektor V^0 był stanem równowagi ogólnej przy globalnych zasobach kapitału i pracy równych K^0, L^0.

Zatem wektor $V' = \left[K_i^{*0}, L_i^{*0}, Q_i^{*0}, \lambda n_i^0, \lambda Q_i^0, p_2^0, p_3^0, ..., p_M^0, w^0, r^0\right]$ jest stanem równowagi ogólnej dla λK^0, $L' = \lambda L^0$.

Zagregowany przy użyciu względnych cen produkt globalny odpowiadający wektorowi V^0 wynosi

$$Y^0 = Q_1^0 + \sum_{i=2}^{M} p_i^0 Q_i^0,$$

a dla wektora V' wynosi

$$Y' = \lambda Q_1^0 + \sum_{i=2}^{M} p_i^0 \lambda Q_i^0 = \lambda Y^0.$$

Zatem dla dowolnego K^0, L^0 i $\lambda > 0$ zachodzi równanie:

$$Y' = F(\lambda K^0, \lambda L^0) = \lambda Y^0 = \lambda F(K^0, L^0),$$

czyli agregatowa funkcja produkcji cechuje się stałymi przychodami względem skali.

Z przedstawionego dowodu wynika również, że w rozważanej gospodarce λ-krotne zwiększenie globalnych zasobów kapitału i pracy skutkuje λ-krotnym wzrostem produkcji wszystkich dóbr bez zmiany rynkowych cen tych dóbr.

Jak dotąd podkreślaliśmy fakt, że w ogólnym przypadku w gospodarce wytwarzającej różne dobra agregatowa funkcja produkcji istnieje jedynie dla danego systemu preferencji. Można zadać pytanie, czy w ogóle jest możliwe dokonanie agregacji niezależnie od tych preferencji, a jeśli tak, to jakie warunki muszą być wtedy spełnione.

Zauważmy najpierw, że dla każdego sektora gospodarki traktowanego jako całość możemy zdefiniować funkcję produkcji, która danym nakładom kapitału i pracy alokowanym do sektora w stanie równowagi ogólnej K_i, L_i przyporządkowuje wielkość produkcji sektora (globalną produkcję i-tego dobra Q_i), $Q_i = F_i(K_i, L_i)$, przy czym $K_i = n_i K_i^*$, $L_i = n_i L_i^*$. W odróżnieniu od zdefiniowanej powyżej agregatowej funkcji produkcji dla całej gospodarki, funkcja produkcji sektora istnieje niezależnie od systemu preferencji społecznych, czyli postać funkcji F_i jest dana bez względu na kształt funkcji popytu lub społecznej funkcji użyteczności i zależy jedynie od funkcji produkcji pojedynczych firm działających w sektorze f_i. Łatwo się o tym przekonać, zauważając, że z warunków równowagi ogólnej (24)–(26) wynika równanie analogiczne do równania (11). W równowadze ogólnej w każdym sektorze funkcjonuje zatem taka liczba firm, że spełnione jest równanie:

$$\frac{\partial q_i}{\partial K_i}\left(\frac{K_i}{n_i}, \frac{L_i}{n_i}\right) \cdot \frac{K_i}{n_i} + \frac{\partial q_i}{\partial L}\left(\frac{K_i}{n_i}, \frac{L_i}{n_i}\right) \cdot \frac{L_i}{n_i} = q_i\left(\frac{K_i}{n_i}, \frac{L_i}{n_i}\right), \qquad i = 1, \ldots, M.$$

Zakładając, jak poprzednio, że dla danych K_i, L_i liczba firm w sektorze n_i spełniająca powyższe równanie jest określona jednoznacznie, możemy ją wyrazić jako funkcję $n_i = n_i(K_i, L_i)$, przy czym postać tej relacji zależy jedynie od funkcji q_i. Wtedy produkcja i-tego sektora jest równa:

$$Q_i = n_i q_i\left(\frac{K_i}{n_i}, \frac{L_i}{n_i}\right) = F_i(K_i, L_i),$$

skąd widać, że postać funkcji F_i zależy jedynie od funkcji q_i.

Powinno być jasne, że funkcje $F_i(K_i, L_i)$ posiadają te same własności, co agregatowa funkcja produkcji dla gospodarki jednosektorowej skonstruowana w części 3. W szczególności funkcje te są liniowo jednorodne (Własność 2). Własność 3 przyjmuje teraz następującą postać układu równań:

$$p_i \frac{\partial F_i(K_i, L_i)}{\partial K_i} = r, \qquad p_i \frac{\partial F_i(K_i, L_i)}{\partial L_i} = w, \qquad i = 1, ..., M,$$

które, ze względu na liniową jednorodność funkcji $F_i(K_i, L_i)$, można zapisać w równoważny sposób:

$$p_i f_i'(k_i) = r, \qquad p_i\left(f_i(k_i) - k_i f_i'(k_i)\right) = w, \qquad i = 1, ..., M. \tag{29}$$

gdzie $k_i = K_i / L_i$ oraz $f_i(k_i) = F_i(k_i, 1)$ i $f_i'(k_i) = df_i(k_i)/dk_i$.

Problem konstrukcji agregatowej funkcji produkcji w rozpatrywanej do tej pory gospodarce wielosektorowej możemy teraz traktować jako problem agregacji w gospodarce złożonej z M sektorów o liniowo jednorodnych funkcjach produkcji. W literaturze dotyczącej problemu agregacji można znaleźć dwa ustalenia odnośnie do warunków agregacji w tak zdefiniowanym problemie.

Green (1964), opierając się na pracy Gormana (1953), pokazał, że w warunkach efektywnej alokacji czynników produkcji między poszczególnymi firmami (firmy maksymalizują zyski przyjmując ceny jako dane), agregacja funkcji produkcji poszczególnych firm $Q_i = F_i(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{im})$ jest możliwa wtedy i tylko wtedy, gdy przy danych cenach rynkowych czynników produkcji ścieżki ekspansji produkcji wszystkich firm są tożsamymi liniami prostymi wychodzącymi z początku układu współrzędnych (*parallel straight lines through their origins*)[21]. Wtedy i tylko wtedy istnieją funkcje F, $h_1, ..., h_n$, takie, że

$$Q = \sum_{i=1}^{n} h_i(Q_i) = F(x_1, x_2, ... x_m),$$

przy czym

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij},$$

zaś funkcja $F(x_1, x_2, ... x_m)$ jest liniowo jednorodna. Ponadto, jeśli funkcje produkcji poszczególnych firm $F_i(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{im})$ są liniowo jednorodne, to

$$Q = \sum_{i=1}^{n} c_i Q_i,$$

gdzie $c_i = const$. W twierdzeniu Gormana−Greena zakłada się *implicite*, że postać funkcji $F(x_1, x_2, ... x_m)$ zależy wyłącznie od funkcji F_i.

Fisher (1984, 624−625), posługując się odmiennym sposobem wnioskowania, ustalił, że w przypadku specjalizacji produkcji (każda firma wytwarza odmienny rodzaj produktu), w warunkach pełnej mobilności i efektywnej alokacji czynni-

[21] Dla dwuczynnikowej funkcji produkcji z kapitałem i pracą warunek ten oznacza, że ścieżki ekspansji produkcji dla wszystkich firm mają postać $K = aL$, przy czym a jest takie samo dla wszystkich firm. Oryginalnie twierdzenie Gormana dotyczyło agregacji funkcji użyteczności. Green przeniósł to twierdzenie na problem agregacji funkcji produkcji.

ków produkcji między poszczególnymi firmami oraz przy założeniu, że funkcje produkcji wszystkich firm są liniowo jednorodne, agregacji produktu można dokonać jedynie w przypadku neutralnych w sensie Hicksa (*Hicks-neutral*) różnic pomiędzy funkcjami produkcji poszczególnych firm. Oznacza to, że funkcje produkcji poszczególnych firm, z założenia liniowo jednorodne, muszą być postaci $Q_i = A_i F_1(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{im})$, gdzie $F_1(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{im})$ jest taka sama dla wszystkich firm. Warunek ten jest w istocie równoważny warunkom podanym w twierdzeniu Gormana−Greena dla przypadku liniowo jednorodnych funkcji produkcji poszczególnych firm, co poniżej pokażemy.

Zamiast do pojedynczych firm, powyższe ustalenia możemy odnieść do liniowo jednorodnych funkcji produkcji dla sektorów w naszej gospodarce złożonej z M sektorów. Załóżmy zatem, że funkcje produkcji dla wszystkich sektorów $F_i(K_i, L_i)$ spełniają warunek podany w twierdzeniu Gormana−Greena, czyli przy danych cenach rynkowych kapitału i pracy ścieżki ekspansji produkcji dla wszystkich sektorów są liniami prostymi wychodzącymi z początku układu współrzędnych, czyli wszystkie mają postać $K = aL$, przy czym a jest takie samo dla wszystkich sektorów. Oznacza to, że w dowolnym stanie równowagi ogólnej stosunek kapitału i pracy alokowanych do poszczególnych sektorów jest taki sam dla wszystkich sektorów i tym samym równy stosunkowi globalnych zasobów kapitału i pracy:

$$k_i = K_i / L_i = k = K / L.$$

Stąd oraz z równań (29) zapisanych dla pierwszego sektora (z $p_1 = 1$) otrzymujemy:

$$f_1'(k) = r, \qquad f_1(k) - kf_1'(k) = w. \tag{30}$$

Z powyższych równań wynika, że ceny rynkowe kapitału i pracy w równowadze ogólnej są funkcjami stosunku globalnych zasobów kapitału i pracy, $r = r(k)$, $w = w(k)$, przy czym postać tych funkcji zależy wyłącznie od funkcji produkcji dla sektora 1. Ponieważ sektor 1 został wybrany arbitralnie jako ten, w którego przypadku cenę wytwarzanego w nim dobra traktujemy jako *numeraire*, funkcje $r(k), w(k)$ w takim samym stopniu zależą od funkcji produkcji dla pozostałych sektorów, które z kolei pozostają w ścisłej relacji z funkcją produkcji sektora 1, wynikającej z ograniczenia narzuconego przez warunki twierdzenia Gormana−Greena[22].

Ze względu na fakt, iż w równowadze ogólnej spełnione jest równanie:

$$\sum_{i=1}^{M} p_i Q_i = wL + rK$$

[22] Algebraiczną postać tej relacji wyprowadzimy poniżej.

(por. równanie (18)), otrzymujemy:

$$Y = \sum_{i=1}^{M} p_i Q_i = w(k)L + r(k)K = F(K, L), \tag{31}$$

przy czym z powyższego równania wynika, że agregatowa funkcja produkcji $F(K, L)$ jest funkcją liniowo jednorodną. Z równania tego widzimy również, że postać funkcji $F(K, L)$ jest zależna wyłącznie od funkcji produkcji dla sektorów (poprzez funkcje $r(k)$ i $w(k)$), a tym samym funkcji produkcji działających w nich firm. W tym szczególnym przypadku agregatowa funkcja produkcji istnieje zatem niezależnie od jakichkolwiek założeń dotyczących popytu na poszczególne dobra czy społecznej funkcji użyteczności.

Zauważmy wreszcie, że zgodnie z równaniem (31) do zagregowania produkcji poszczególnych dóbr możemy używać rynkowych cen tych dóbr. Ceny te pełnią zatem rolę stałych c_i, o których mowa w twierdzeniu Gormana−Greena. Nietrudno pokazać, że faktycznie ceny te są stałe, niezależne ani od globalnych nakładów czynników produkcji, ani od preferencji społecznych dotyczących sposobu wykorzystania tych nakładów do produkcji określonych dóbr.

Zestawiając ze sobą równania (29) i równania (30) oraz ponownie korzystając z faktu, że $k_i = k = K / L$, otrzymujemy układ równań:

$$f_1'(k) = p_i f_i'(k), \qquad i = 2, \dots, M, \tag{32}$$

$$f_1(k) - kf_1'(k) = p_i \left(f_i(k) - kf_i'(k) \right), \qquad i = 2, \dots, M. \tag{33}$$

Łącząc ze sobą te równania po kilku prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{f_1'(k)}{f_1(k)} = \frac{f_i'(k)}{f_i(k)}, \qquad i = 2, \dots, M,$$

lub w równoważnej postaci:

$$\frac{d \ln f_1(k)}{dk} = \frac{d \ln f_i(k)}{dk}, \qquad i = 2, \dots, M.$$

Ponieważ równanie to zachodzi dla dowolnego $k = K / L$, po obustronnym scałkowaniu i opuszczeniu logarytmów otrzymujemy:

$$f_i(k) = A_i f_1(k), \qquad i = 2, \dots, M. \tag{34}$$

Ponieważ $f_i(k) = F_i(1, K)$, przy czym funkcje F_i są liniowo jednorodne, równanie (34) jest równoważne równaniu:

$$F_i(K, L) = A_i F_1(K, L), \qquad i = 2, \dots, M.$$

Funkcje produkcji dla poszczególnych sektorów różnią się zatem jedynie stałym czynnikiem skalującym A_i, pozwalającym na wzajemne przeliczanie jednostek poszczególnych dóbr. Inaczej mówiąc, dla dowolnych nakładów kapitału i pracy ilość jednostek określonego dobra wytworzonych w jednym sektorze pozostaje w stałej proporcji w stosunku do ilości jednostek innego dobra wytworzonych w innym sektorze przy tych samych nakładach kapitału i pracy.

Z (32) i (34) wynika ponadto następująca zależność:

$$p_i = 1/A_i, \qquad\qquad i = 2,...,M,$$

czyli ceny wszystkich dóbr są stałe, a różnice między nimi wynikają wyłącznie z różnic pomiędzy sektorowymi funkcjami produkcji dla poszczególnych dóbr.

5. Uwagi końcowe

W artykule zrekonstruowano mikroekonomiczne założeń leżących u podstaw agregatowej funkcji produkcji o stałych przychodach względem skali. Agregatowa funkcja produkcji o takich własnościach stanowi element konstrukcyjny licznych modeli makroekonomicznych oraz ramy metodyczne wielu badań empirycznych. Artykuł ma w głównej mierze charakter krytyczno-przeglądowy, przywołuje i systematyzuje rozproszone w różnych pracach ustalenia oraz uzupełnia je w kilku punktach wynikami własnymi.

Wyjaśniono najpierw, odwołując się do literatury poświeconej problemowi agregacji, że sama koncepcja jakiejkolwiek agregatowej funkcji produkcji pozostaje w ścisłym związku z koncepcją walrasowskiej równowagi ogólnej w gospodarce. Pokazano, że logicznie spójny obraz działalności produkcyjnej na poziomie pojedynczych firm w warunkach konkurencji doskonałej, w ramach którego da się skonstruować agregatową funkcję produkcji o stałych przychodach względem skali, możliwy jest przy założeniu, że funkcje produkcji pojedynczych firm generują U-kształtne krzywe kosztów przeciętnych, oznaczające zależność stopnia jednorodności funkcji od skali produkcji. Ideę te zaczerpnięto z pracy Solowa (1956). W takim ujęciu agregatowa funkcja produkcji o stałych przychodach względem skali przyporządkowuje danym globalnym nakładom czynników produkcji poziom produktu wytwarzanego w całej gospodarce przy założeniu, że firmy funkcjonują na poziomie minimum krzywej kosztu jednostkowego, osiągając zerowe zyski czyste. Uogólniając model równowagi ogólnej na gospodarkę wielosektorową wyjaśniono w systematyczny sposób problemy, jakie dla kwestii istnienia agregatowej funkcji produkcji stwarza konieczność agregowania produkcji różniących się od siebie fizycznie dóbr. Pokazano, że w ogólnym przypadku w konstrukcji agregatowej funkcji produkcji nie da się oddzielić samych tylko technicznych aspektów produkcji od systemu preferencji społecznych determinujących strukturę produkcji poszczególnych dóbr. Agregatowa funkcja produkcji istnieje wówczas jedynie przy danym systemie tych preferencji i wraz z ich zmianą sama ulega zmianie. Co więcej, nie można również ustalić formalnych własności tak zdefiniowanej funkcji, w szczególności jej liniowej jednorodności, pomimo faktu, że agregowane są liniowo jednorodne funkcje produkcji dla poszczególnych sektorów, w których odbywa się w warunkach doskonale konkurencyjnych produkcja poszczególnych dóbr. Dopiero przyjęcie założenia o istnieniu liniowo jednorodnej społecznej funkcji użyteczności pozwala udowodnić liniową jednorodność związanej z nią agregatowej funkcji produkcji. Twierdzenie Gormana−Greena i ustalenia Fishera implikują, że właściwa (tzn. niezależna od preferencji społecznych) agregacja jest możliwa jedynie w trywialnym przypadku, gdy funkcje produkcji poszczególnych firm (w naszym modelu – poszczególnych sektorów), wytwarzających różne dobra, *de facto* nie różnią się między sobą. Dodatkowo, fakt, że funkcje produkcji dla poszczególnych sektorów są liniowo jednorodne, umożliwia agregowanie produkcji poszczególnych dóbr przy użyciu ich cen rynkowych.

Na podstawie przeprowadzonej analizy można też pokusić się o pewne wnioski natury bardziej ogólnej. Samuelson (1962) postulował kiedyś traktowanie zagregowanych modeli gospodarki wywodzących się z tradycji neoklasycznej jako „użytecznych metafor". Warto wiedzieć, na czym dokładnie polega ich metaforyczny charakter. Podjęte rozważania pozwalają na uzmysłowienie sobie, jak silne założenia, upraszczające w sposób skrajny rzeczywistość gospodarczą, kryją się za koncepcją agregatowej funkcji produkcji. Powtarzane często deklaracje o istnieniu solidnych mikropodstaw współczesnej teorii makroekonomicznej są w dużej mierze na wyrost.

Bibliografia

Barro, Robert J. i Xavier Sala-i-Martin. 1995. *Economic Growth*. New York: McGraw-Hill.

Blackorby, Charles i William Schworm. 1988. „The existence of input and output aggregates in aggregate production functions". *Econometrica* 56 (3): 613−643.

Blackorby, Charles i William Schworm. 1984. „The structure of economies with aggregate measures of capital: a complete characterization". *Review of Economic Studies* 51 (4): 633−650.

Blanchard, Olivier Jean i Stanley Fischer. 1990. *Lectures on Macroeconomics*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Blaug, Mark. 2000. *Teoria ekonomii. Ujęcie retrospektywne*. Tłum. Izabela Budzyńska *et al.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Cobb, Charles W. i Paul H. Douglas. 1928. „A theory of production". *American Economic Review* 8 (2): 139−165.

Felipe, Jesus. 1999. „Total factor productivity growth in East Asia: a critical survey". *Journal of Development Studies* 35 (5): 1−41.

Felipe, Jesus. 2000. „On the myth and mystery of Singapore's 'zero TFP'". *Asian Economic Journal* 14 (3): 187−209.

Felipe, Jesus i John S.L. McCombie. 2003. „Some methodological problems with the neoclassical analysis of the East Asian miracle". *Cambridge Journal of Economics* 27 (6): 695−721.

Felipe, Jesus i Franklin M. Fisher. 2003. „Aggregation in production functions: what applied economists should know". *Metroeconomica* 54 (2): 208−262.

Fernandez, Esther Alfonso Novales i Jesus Ruiz. 2009. *Economic Growth, Theory and Numerical Solution Methods*. Berlin−Heidelberg: Springer.

Fisher, Franklin M. 1969. „The existence of aggregate production functions". *Econometrica* 37 (4): 553−577.

Fisher, Franklin M. 1982. „Aggregate production functions revisited: the mobility of capital and the rigidity of thought". *Review of Economic Studies* 49 (5): 615−626.

Fisher, Franklin M. 1987. „Aggregation problem". W: *The New Palgrave. A Dictionary of Economics*, red. John Eatwell, Murray Millgate i Peter Newman. London−New York: Macmillan Stockton Press Maruzen.

Fisher, Franklin M. 1993. *Aggregation: Aggregate Production Functions and Related Topics*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Goodfriend, Marvin i Robert G. King. 1997. „The new neoclassical synthesis and the role of monetary policy". W: *NBER Macroeconomics Annual*, red. Ben Bernanke i Julio Rotemberg. Cambridge, MA: The MIT Press.

Gorman, W.M. 1953. „Community preference fields". *Econometrica* 21 (2): 63−80.

Green, H.A. John. 1964. *Aggregation in Economic Analysis. An Introductory Survey*. Princeton: Princeton University Press.

Hicks, John R. 1932. *The Theory of Wages*. London: Macmillan.
Kim, Jong-Il i Lawrence J. Lau. 1994. „The sources of economic growth of the East Asian newly industrialised countries". *Journal of the Japanese and International Economies* 8 (3): 235–271.
Kirman, Alan. 2010. „The economic crisis is a crisis for economic theory". *CESifo Economic Studies* 56 (5): 498–535.
Klein, Lawrence R. 1946a. „Macroeconomics and the theory of rational behavior". *Econometrica* 14 (3): 93–108.
Klein, Lawrence R. 1946b. „Remarks on the theory of aggregation". *Econometrica* 14 (5): 303–312.
Krugman, Paul R. 1997. „Asia's economic growth". *The Economist* 15.
Mankiw, N. Gregory, David Romer i David N. Weil. 1992. „A contribution to the empirics of economic growth". *Quarterly Journal of Economics* 107 (3): 407–437.
May, Kenneth. 1946. „The aggregation problem for a one-industry model". *Econometrica* 14 (5): 285–298.
May, Kenneth. 1947. „Technological change and aggregation". *Econometrica* 15 (1): 51–63.
Nataf, André. 1948. „Sur la possibilité de construction de certains macromodèles". *Econometrica* 16 (3) : 232–244.
Pu, Shou Shan. 1946. „A note on macroeconomics". *Econometrica* 14 (4): 299–302.
Samuelson, Paul A. 1962. „Parable and realism in capital theory: the surrogate production function". *Review of Economic Studies* 29 (2): 193–206.
Solow, Robert M. 1956. „A contribution to the theory of economic growth". *Quarterly Journal of Economics* 70 (2): 65–94.
Solow, Robert M. 1957. „Technical change and the aggregate production function". *Review of Economics and Statistics* 39 (3): 312–320.
Temple, Jonathan R.W. 1999. „The new growth evidence". *Journal of Economic Literature* 37: 112–156.
Temple, Jonathan R.W. 2006. „Aggregate production functions and growth economics". *International Review of Applied Economics* 20 (3): 301–317.
Young, Alwyn. 1992. „A tale of two cities: factor accumulation and technical change in Hong Kong and Singapore". W: *NBER Macroeconomics Annual 7*, red. Olivier Jean Blanchard i Stanley Fisher, 13–64. Cambridge, MA: The MIT Press.
Young, Alwyn. 1995. „The tyranny of numbers: confronting the statistical realities of the East Asian growth experience". *Quarterly Journal of Economics* 110 (3): 641–680.

Microeconomic fundamentals of the aggregate production function with constant returns to scale

Abstract

In the paper the aggregation problem regarding production functions is considered. This issue is of fundamental importance for the mainstream of contemporary macroeconomics due to the common usage of the aggregate production function (APF) both in theoretical models and empirical research. The aim of the paper is theoretical reconstruction of microeconomic assumptions underlying the APF with constant returns to scale (linearly homogenous). The paper is mainly the critical review that systematises the results scattered in the literature and supplements them with the results of the author. Following the literature, the relationship between the concept of the APF and general equilibrium in the economy was explained. It was shown that consistent view of economic activity on the level of individual firms operating in perfectly competitive one-sector economy, which enables to construct the APF with constant returns to scale, is possible under the assumption that firms reaches the minimum of its U-shaped average cost curves, achieving zero subnormal profits. Generalizing considerations about the existence of the APF over multi-sector economy, new problems raised by the need to aggregate different products were considered.

Keywords: aggregate production function, constant returns to scale, general equilibrium, perfect competition

JEL Codes E13, D41, D50

DOI: 10.17451/eko/45/2016/147