

Wycena opcji na VIX – podejście heurystyczne

Juliusz Jabłecki*, Ryszard Kokoszcyński*, Paweł Sakowski**,
Robert Ślepaczuk** i Piotr Wójcik**

Abstrakt

W artykule przedstawiamy prostą parametryzację powierzchni zmienności w opcjach, których instrumentem bazowym jest zmienność implikowana z opcji na S&P 500 wyrażona indeksem VIX. W szczególności pokazujemy, że: (i) zmienność implikowana opcji ATM na VIX jest silnie skorelowana z uśmiechem zmienności opcji na S&P 500; (ii) zmienność implikowana ATM opcji na VIX zmniejsza się wykładniczo wraz z terminem wygaśnięcia opcji; (iii) uśmiech zmienności opcji na VIX daje się dobrze opisać za pomocą popularnego modelu zmienności stochastycznej SABR. Wykorzystując proste reguły kciuka opisane w pkt. (i)-(iii) można podać cenę (zmienność implikowaną) opcji na VIX o dowolnym terminie i cenie wykonania, otrzymując wartość zbliżoną do rynkowej.

Słowa kluczowe: opcje na VIX, zmienność implikowana, powierzchnia zmienności.

Kody JEL: JEL: G12, G13.

* Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski oraz Instytut Ekonomiczny, Narodowy Bank Polski (JJ autor korenspondujący)

** Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski

1. Wstęp

Opcje na VIX to kontrakty opcyjne, w których podstawą rozliczenia jest wartość indeksu VIX, wyrażającego w syntetyczny sposób zmienność implikowaną z 30-dniowych opcji na indeks S&P 500. Jako „pochodne pochodnych” opcje na VIX stanowią najnowszą i zarazem najbardziej wyrafinowaną klasę instrumentów na zmienność. Chociaż wprowadzenie opcji na VIX postulowano równoległe z wprowadzeniem samego indeksu, tj. już w 1993 r. (Whaley, 1993), to kontrakty te weszły do obrotu giełdowego dopiero 13 lat później, w lutym 2006 r.¹, a wyrażoną popularność zaczęły zyskiwać szczególnie w ciągu ostatnich lat kryzysu finansowego. Obecnie rynek opcji na VIX to ponad 9 mln otwartych pozycji dziennie o łącznej wrażliwości na zmianę zmienności implikowanej (tzw. vega) ok. 200 mln USD, przy zakresie cen wykonania wahającym się od 70% do ponad 300% bieżącej wartości indeksu (w zależności od terminu wygaśnięcia opcji). Podobnie jak kontrakty futures na VIX, opcje umożliwiają inwestorom zabezpieczanie długich pozycji w akcjach (przede wszystkim w indeksie S&P 500 i aktywach silnie z nim skorelowanych) oraz wyrażenie kierunkowych poglądów co do kształtowania się oczekiwanej zmienności. Inaczej jednak niż kontrakty futures, opcje umożliwiają uzyskanie pożądanej ekspozycji bez konieczności ponoszenia potencjalnie nieograniczonych strat w wypadku niekorzystnej zmiany indeksu (por. np. Moran i Dash, 2007 na temat pożytków z inwestowania w opcje na VIX). Jednak mimo zalet i ewidentnego rozwoju rynku opcji na VIX, literatura na ten temat jest wciąż relatywnie uboga.

Jako pierwszy z wyceną opcji na zmienność implikowaną zmierzył się Whaley (1993) – pomysłodawca indeksu VIX - który proponował wykorzystanie do tego celu tradycyjnego modelu Blacka (1976), gdzie instrumentem bazowym byłby kontrakt terminowy na VIX. Model Blacka ma jednak tę wadę, że traktuje zmienność jako parametr stały, a w każdym razie niestochastyczny, co trudno pogodzić z obserwacjami empirycznymi. Stąd np. Grünbichler i Longstaff (1996) zaadaptowali prosty proces stochastyczny (podobny do rozważanego przez Hulla i White’a 1987 czy Hestona 1993) do opisu dynamiki indeksu zmienności impli-

¹ Opóźnienie wynikało przede wszystkim stąd, że aby mógł powstać płynny rynek opcji, musiał najpierw wykształcić się płynny rynek instrumentu bazowego, tj. kontraktów futures na VIX, niezbędnych w celu odpowiedniego zabezpieczenia pozycji w opcjach. Kontraktami futures na VIX zaczęto handlować dopiero w 2004 r., po zmodyfikowaniu formuły indeksu, która obecnie jest wolna od założeń metodologicznych i opiera się na koncepcji zaproponowanej pierwotnie do wyceny kontraktu variance swap. Por. także Dupire (2004), Derman, Demeter, Kamal, i Zou (1999) oraz Carr i Madan (2001) na temat wyceny kontraktu variance swap oraz CBOE (2003) na temat konstrukcji VIX. Jablecki i in. (2013) zawiera przystępne omówienie historii indeksu VIX oraz jego związku z metodą, a wyceny variance swapa.

kowanej, uzyskując wzory na cenę opcji w postaci analitycznej. Jednak słabością obu podejść – Blacka oraz Grünblichera i Longstaffa – jest oddzielenie problemu wyceny opcji na VIX od analizy ewolucji indeksu S&P 500, co może skutkować obciążeniem tzw. *vegi*, czyli wrażliwości ceny opcji na ryzyko zmiany zmienności implikowanej (Sepp, 2008)² Przełom w myśleniu o wycenie instrumentów pochodnych na zmienność przyniosły dopiero prace Dermana i in. (1999) oraz Carra i Madana (2001), którzy pokazali, jak w sposób syntetyczny i zarazem wolny od założeń modelowych stworzyć pozycję w zmienności za pomocą statycznej replikacji. Koncepcje te legły u podstaw zmiany definicji indeksu VIX (CBOE, 2003) i umożliwiły rozwój teorii wyceny opcji na zmienność, która gwarantuje spójność pomiędzy cenami instrumentów pochodnych i kosztami ich replikacji (Gatheral, 2008; Sepp, 2008; Lin i Chang, 2010 czy Cont i Kokholm, 2011).

Na tym tle celem niniejszego artykułu jest uzupełnienie dotychczasowej literatury o zestaw kilku prostych „reguł kciuka” – tj. ugruntowanych teoretycznie intuicji empirycznych – które by syntetycznie ujmowały kluczowe cechy powierzchni zmienności z opcji na VIX, ułatwiając inwestorom i analitykom ocenę rynkowych kwotowań. W szczególności, pokazujemy, że: (i) zmienność implikowana po cenie (ATM) opcji na VIX jest silnie skorelowana z uśmiechem zmienności opcji na S&P 500 (tj. zmienności implikowanej w funkcji ceny wykonania opcji) i przedstawiamy teoretyczne uzasadnienie dla tej empirycznej obserwacji; (ii) zmienność implikowana ATM opcji na VIX zmniejsza się wykładniczo wraz z terminem wygaśnięcia opcji; (iii) uśmiech zmienności opcji na VIX daje się dobrze opisać za pomocą popularnego modelu zmienności stochastycznej SABR (Hagan, Kumar, Lesniewski, i Woodward, 2002). Wykorzystując obserwacje opisane w pkt. (i) – (iii) można zakwotować cenę (wyrażoną w zmienności implikowanej) opcji na VIX o dowolnym terminie i cenie wykonania, otrzymując wartość zbliżoną do rynkowej. Naturalnie proponowana przez nas prosta parametryzacja opiera się na obserwacjach empirycznych, a nie ścisłej logice bezarbitrażowej, więc nie może być substytutem bardziej formalnych modeli w duchu Gatheral (2008), Cont i Kokholm (2011) czy Lin i Chang (2010), ale powinna przynajmniej ułatwić interpretację i analizę danych rynkowych, a przez to stać się ważnym elementem budowy portfela i oceny strategii inwestycyjnych.

2. S&P 500, VIX i opcje na oba indeksy

Indeks S&P 500 (dalej po prostu „SPX”) to indeks 500 największych spółek notowanych na giełdzie nowojorskiej (NYSE lub NASDAQ). VIX to miara ocze-

² Ryzyko zmienności zmienności jest szczególnie ważne przy strategiach dynamicznej replikacji pozycji opcyjnych oraz przy wycenie bardziej egzotycznych instrumentów, będących złożeniem opcji waniliowych.

kiwanej zmienności na rynku akcji wyznaczona w oparciu o ceny opcji na SPX. Początkowo VIX był wyznaczany, zgodnie z koncepcją swego pomysłodawcy, jako średnia arytmetyczna zmienności implikowanych z 8 najbardziej płynnych kontraktów, 4 typu call i 4 typu put (Whaley, 1993). Obecnie jednak jego konstrukcja nie odwołuje się do żadnego modelu i wykorzystuje ceny wszystkich dostępnych na rynku opcji na SPX o określonym terminie wygaśnięcia, co pozwala na zreplikowanie wartości oczekiwanej przyszłej zrealizowanej wariancji (Carr i Wu, 2006; CBOE, 2003)³. Modyfikacja indeksu uspojniła jego konstrukcję z konwencjami stosowanymi na rynku i umożliwiła inwestorom efektywne zabezpieczanie pozycji w zmienności. Co istotne, w indeksie VIX nie można zajmować pozycji bezpośrednio – tj. nie jest możliwe stworzenie instrumentu, którego wartość byłaby wyrażona poziomem VIX⁴. Od tego mankamentu wolne są jednak wprowadzone w 2004 r. przez CBOE kontrakty futures, które rozlicza się poprzez odniesienie do poziomu indeksu VIX w dniu wygaśnięcia kontraktu. Ceny kontraktów futures na VIX wyrażają zatem oczekiwania uczestników rynku co do zmienności S&P 500, jaka będzie uwzględniona w cenach 30-dniowych opcji w terminie zapadalności kontraktu. Ze względu na brak możliwości zainwestowania bezpośrednio w VIX, to właśnie kontrakty futures na VIX stanowią instrument bazowy dla wprowadzonych w lutym 2006 r. opcji na VIX. Opcje te mają charakter europejski (tj. nie można ich wykonać przed terminem) i są rozliczane gotówkowo do wartości indeksu VIX w dniu wygaśnięcia, do której zresztą zbiega też cena kontraktu futures na indeks VIX. Aktualnie dostępne są opcje jedynie na 6 kolejnych miesięcy, ale i tak opcje na VIX są drugimi, po opcjach na SPX, najbardziej płynnymi opcjami kwotowanymi przez CBOE/CFE. Zresztą mimo znacznie późniejszego wprowadzenia i trudnych początków opcje na VIX już teraz zaczynają powoli dorównywać pod względem liczby otwartych kontraktów opcjom na SPX (Wykres 1).

Skoro VIX jest miarą oczekiwanej zmienności SPX, to można oczekiwać, że ceny opcji na oba indeksy będą ze sobą ściśle powiązane. Tradycyjne podejście do wyceny opcji (por. Black i Scholes 1973, Merton 1973 oraz Black 1976) jest jednak w tym wypadku niewystarczające. Model Blacka-Scholesa zakłada, że

³ Por. także Jabłecki, Kokoszczyński, Sakowski, Ślepaczuk, i Wójcik (2014), gdzie obszerniej przedstawiliśmy historię indeksu VIX, jego związek w metodą wyceny variance swapa i przeanalizowaliśmy pożytki z uwzględnienia pozycji na zmienność w portfelu inwestora.

⁴ Dzieje się tak dlatego, że VIX wyraża w każdej chwili oczekiwaną zmienność S&P 500 w ciągu kolejnego miesiąca (od tej chwili). Jeśli na przykład ktoś otworzyłby pozycję w jednomiesięcznym variance swapie, to po tygodniu zysk na takiej pozycji byłby równy sumie zysku (ew. straty) narosłego w ciągu tygodnia i oczekiwanej zmienności w ciągu kolejnych 3 tygodni. Tymczasem VIX tego dnia wciąż wyrażałby oczekiwaną zmienność w ciągu kolejnych 4 tygodni.

ewolucja instrumentu bazowego S jest dana następującym równaniem różniczkowym:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t, \tag{1}$$

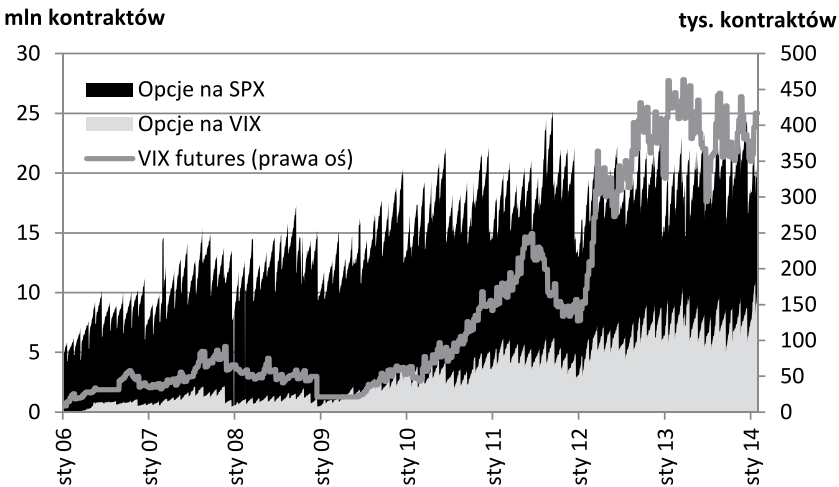
gdzie σ oznacza zmienność S , a Z proces Wienera. Ponieważ w indeksach SPX i VIX nie da się zająć pozycji bezpośrednio, prawdziwym instrumentem bazowym jest kontrakt terminowy $f_t(S)$, którego cena zbiega do ceny S . Wówczas cena europejskiej opcji call na S z ceną wykonania K i terminem T , $C(K, T)$, jest równa wartości bieżącej $\mathbb{E}(\max(S_T - K, 0))$:

$$C_t(K, T) = \exp(-r(T - t)) [f_t(S)N(d_+) - KN(d_-)], \tag{2}$$

gdzie r jest stopą wolną od ryzyka, $N(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego, a

$$d_{\pm} = \frac{\log(f_t/K) \pm \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}. \tag{3}$$

Wykres 1. Liczba otwartych pozycji w kontraktach na zmienność

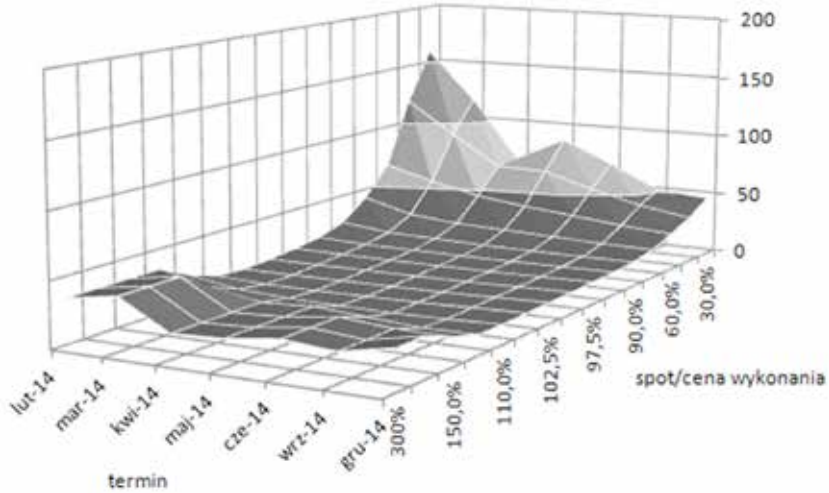


Źródło: dane Bloomberg, CBOE; obliczenia własne.

Widać stąd, że kluczowym parametrem wyceny opcji jest zmienność instrumentu bazowego σ . Ponieważ pozostałe argumenty funkcji (2) są znane lub bezpośrednio obserwowalne na rynku, znając $C(K, T)$ można jednoznacznie ustalić odpowiadającą jej zmienność – tzw. zmienność implikowaną. Jedno z kluczowych założeń modelu Blacka-Scholesa mówiło o tym, że zmienność opisująca dyfuzję cen instrumentu bazowego S jest immanentną cechą tego instrumentu, a nie parametrów kontraktu opcyjnego. Innymi słowy, niezależnie od terminu opcji ani cen

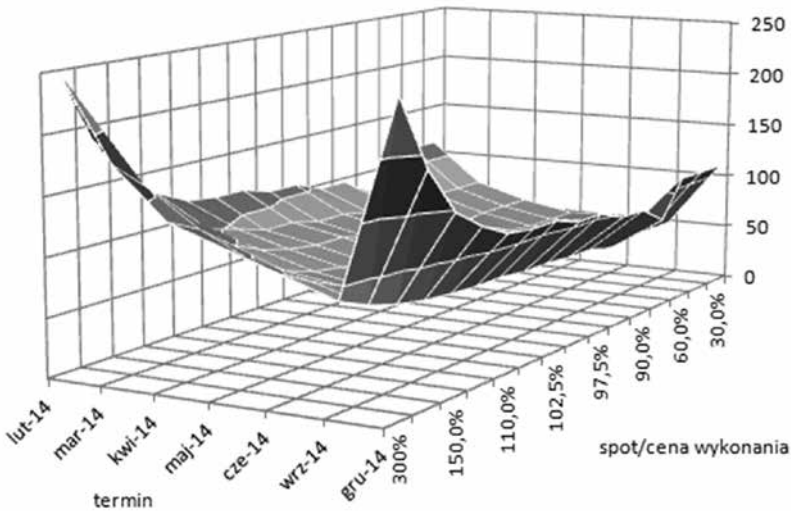
wykonania związane z nimi zmienności powinny być zawsze takie same – i to dla każdego instrumentu bazowego.

Wykres 2. Powierzchnia zmienności implikowanej z opcji na S&P 500 na dzień 30 stycznia 2014 r.



Źródło: dane Bloomberg, CBOE. W konstrukcji powierzchni zmienności dla cen wykonania poniżej aktualnego poziomu S&P 500 wykorzystano opcje put i vice versa. Ze względów prezentacyjnych odległość między czerwcem i wrześniem jest taka sama jak dla pojedynczych miesięcy.

Wykres 3. Powierzchnia zmienności implikowanej z opcji na VIX na dzień 30 stycznia 2014 r.



Źródło: dane Bloomberg, CBOE. W konstrukcji powierzchni zmienności dla cen wykonania poniżej aktualnego poziomu VIX wykorzystano opcje put i vice versa. Ze względów prezentacyjnych odległość między czerwcem i wrześniem jest taka sama jak dla pojedynczych miesięcy.

Tymczasem rzut oka na Wykresy 2 i 3 uzmysławia, jak dalekie od rzeczywistości jest to założenie. Widać wyraźnie, że zmienność implikowana opcji na SPX i VIX nie jest stała, jak w modelu Blacka-Scholesa, lecz zmienia się z poziomem ceny wykonania (ang. *strike*) i terminem do zapadalności kontraktu, tworząc nietrywialną powierzchnię. Obserwowana na rynku zależność zmienności implikowanej od terminu i ceny wykonania opcji sprawiają, że model Blacka-Scholesa nie może być adekwatnym narzędziem do wyceny opcji na SPX czy VIX – i między innymi ta właśnie konstatacja doprowadziła do powstania bardziej wyrafinowanych metod wyceny (por. Gatheral 2008; Cont i Kokholm 2011; Lin i Chang 2010). Model Blacka-Scholesa stosowany jest jednak nadal, tyle że głównie jako konwencja kwotowania cen. Wzajemna jednoznaczność odwzorowania pomiędzy cenami opcji a ich zmiennościami implikowanymi i łatwość ustalenia pozostałych parametrów wchodzących do równania (2) doprowadziły bowiem z czasem do wykształcenia się na rynku praktyki podawania cen opcji właśnie w jednostkach zmienności implikowanej. Stąd w dalszym ciągu naszym celem będzie właśnie zaproponowanie – w oparciu o intuicje wywiedzione z modeli teoretycznych – kilku empirycznych prawidłowości kształtowania się zmienności implikowanej opcji na VIX. Na podstawie tych prawidłowości możliwe będzie podanie ceny opcji na VIX (w jednostkach zmienności implikowanej) dla dowolnego terminu i ceny wykonania.

3. Prosty model wyceny opcji na VIX

Eleganckim teoretycznym wyjaśnieniem obserwowanej empirycznie zależności zmienności implikowanej od ceny wykonania i czasu do wygaśnięcia opcji są modele zmienności stochastycznej (Heston 1993; Hull i White 1987; por. także obszernie omówienie w Alexander 2009, s. 268-289). Zaletą tej klasy modeli – tłumaczącą zapewne ich dużą popularność – jest możliwość odzwierciedlenia dobrze udokumentowanych własności stóp zwrotu, jak powrót do średniej (ang. *mean reversion*) czy tendencja aby duże i małe stopy zwrotu występowały w skupiskach (ang. *volatility clustering*). Poniżej przedstawimy ogólną postać modelu zmienności stochastycznej i na jego podstawie sformułujemy wnioski co do spodziewanej zależności pomiędzy zmiennością implikowaną VIX a uśmiechem zmienności – tj. zależnością pomiędzy zmiennością implikowaną a ceną wykonania – w opcjach na SPX. Następnie – również czerpiąc z modeli teoretycznych – pokażemy, że zmienność implikowana ATM opcji na VIX zmniejsza się wykładniczo wraz z terminem wygaśnięcia opcji. Wreszcie, wykorzystując dane rynkowe, proponujemy parametryzację uśmiechu zmienności opcji na VIX z wykorzystaniem popularnego modelu zmienności stochastycznej SABR (Hagan, Kumar, Leśniewski, i Woodward, 2002). Ostatecznie – w oparciu o uzyskane wyniki – pokażemy, jak można oszacować cenę opcji na VIX na podstawie obserwowanego na rynku uśmiechu zmienności SPX.

3.1 Korelacja uśmiechu zmienności SPX i VIX

Formalnie uśmiech zmienności definiuje się jako pochodną funkcji zmienności implikowanej względem ceny wykonania opcji lub jej stopnia „bycia w pieniądzu”⁵

Aby wyznaczyć uśmiech zmienności trzeba więc najpierw znaleźć postać funkcyjną zmienności implikowanej Blacka-Scholesa przy założeniu, że zmienność jako taka jest stochastyczna. Aby skonkretyzować problem, przyjmujemy bardzo ogólny model zmienności stochastycznej omawiany np. przez Wilmotta (2006) czy Alexander (2009). W modelu postuluje się następującą zależność pomiędzy dynamiką instrumentu bazowego S_t a jego wariancją v_t ⁶

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dZ_1, \\ dv_t &= \alpha(v_t) dt + \eta \sqrt{v_t} \beta(v_t) dZ_2, \\ dZ_1 dZ_2 &= \rho dt, \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie μ_t to deterministyczny dryf stóp zwrotu z S_t , η to parametr nazywany zmiennością zmienności, zaś $\alpha(\cdot)$ i $\beta(\cdot)$ są dowolnymi funkcjami. Ostatni warunek mówi o tym, że procesy instrumentu bazowego i wariancji mają stałą korelację ρ . W szczególności przy $\eta = 0$ układ równań (4) sprowadza się do modelu Blacka-Scholesa. Dla ułatwienia notacji model zmienności stochastycznej wygodnie jest wyrazić w jednostkach stopnia „bycia w pieniądzu” (ang. log moneyness, $x_t = \log(S_t/K)$ ⁷ przez zastosowanie następującej zamiany zmiennych:

⁵ Por. np. Gatheral (2006). W literaturze pojęcie uśmiechu zmienności (ang. „volatility smile”) używane jest w najszerszym sensie do opisu zależności pomiędzy zmiennością implikowaną a cenami wykonania przy danym czasie do wygaśnięcia opcji. Ponieważ jednak dla poszczególnych rynków zależność nie zawsze przypomina pełny uśmiech, tylko raczej uśmieszek lub nawet grymas, używa się też niekiedy pojęć „volatility skew” lub „volatility smirk”. W szczególności w odniesieniu do S&P 500 mówi się na ogół o „volatility skew” i – wobec braku dobrego polskiego odpowiednika – będziemy się tym terminem posługiwać zamiennie poniżej, mając jednak na myśli zawsze po prostu uśmiech zmienności, czyli zależność zmienności implikowanej od ceny wykonania.

⁶ Modelowanie wariancji zamiast odchylenia standardowego jest w tym wypadku podyktowane kwestią wygody; jak pokazuje Alexander 2009 za pomocą lematu Ito, równanie dla wariancji postaci $dV(t) = \dots dt + \xi V(t)^\alpha dB(t)$ jest równoważne następującemu równaniu dla odchylenia standardowego $d\sigma(t) = \dots dt + \frac{1}{2} \xi \sigma(t)^{(2\alpha-1)} dB(t)$. Stąd np. Heston (1993) przedstawia swój model zmienności stochastycznej i dla wariancji, i dla odchylenia standardowego. Pamiętajając o tym przekształceniu będziemy więc bez straty ogólności w dalszym ciągu pisać o wariancji indeksu bazowego.

⁷ Ze względu na brak dobrego odpowiednika w języku polskim, w dalszym ciągu będziemy używać angielskiego terminu „moneyness”.

$$x_t := \log \left(\frac{S_t}{F_t} \right) = \log \left(\frac{S_t}{S_0 e^{rt}} \right) = \log \left(\frac{S_t}{S_0} \right) - rt \quad (5)$$

Wówczas na mocy lematu Ito, w mierze neutralnej wobec ryzyka

$$dx_t = -\frac{1}{2}v_t + \sqrt{v_t}dZ_1. \quad (6)$$

Gatheral (2006) proponuje następującą ortogonalizację procesów Wienera:

$$dZ_2 = \rho dZ_1 + \sqrt{1 - \rho^2}d\bar{Z}_1 \quad (7)$$

przy $dZ_1 d\bar{Z}_1 = 0$. Stąd, podstawiając w równaniu wariancji $\sqrt{v_t}dZ_1 = dx_t + \frac{1}{2}v_t$ i $\phi = \sqrt{1 - \rho^2}$, otrzymujemy

$$dv_t = \alpha(v_t)dt + \rho\eta\beta(v_t) \left[dx_t + \frac{1}{2}v_t \right] + \phi\eta\beta(v_t)\sqrt{v_t}d\bar{Z}_1. \quad (8)$$

Równanie (8) opisuje ewolucję natychmiastowej wariancji w czasie, przy czym jedyny element losowości, proces $d\bar{Z}_1$, jest nieskorelowany z losowym czynnikiem w równaniu instrumentu bazowego. Wciąż jednak postać procesu wariancji nie daje się naturalnie przełożyć na zmienność implikowaną z modelu Blacka Scholesa. Na szczęście okazuje się, że zachodzi następujący fakt.

Fakt 1. *Całkowita implikowana wariancja Blacka-Scholesa w modelu zmienności implikowanej (4) może być z dokładnością do stałej przybliżona równaniem $\sigma_{BS}^2(K, T) \approx \frac{1}{2}\rho\eta\beta(v_0)x_T$.*

Dowód niniejszego faktu został oryginalnie przedstawiony przez Gatherala (2006). Poniżej przedstawiamy jego główne kroki. Zauważmy przede wszystkim, że dzięki ortogonalizacji wyrażenie $\phi\eta\beta(v_t)\sqrt{v_t}d\bar{Z}_1$ w równaniu (8) znika pod wartością oczekiwaną, tj.

$$\mathbb{E}(v + dv|dx) = v + \alpha(v)dt + \rho\eta\beta(v) \left[dx + \frac{v}{2}dt \right]. \quad (9)$$

Jak wykazali niezależnie Derman i Kani (1998) oraz Dupire (2004), wariancję lokalną można wyrazić jako warunkową wartość oczekiwaną natychmiastowej wariancji $\sigma^2(K, T) = \mathbb{E}(v_T|S_T = K)$. Tym samym dla wszystkich t nieodległych od czasu wygaśnięcia opcji T mamy w przybliżeniu:

$$\begin{aligned} v_{loc}(x, t) &= \mathbb{E}(v_t|x_T) \\ &\approx v_0 + \left[\alpha(v_0) + \rho\eta\beta(v_0)\frac{v_0}{2} \right] t + \rho\eta\beta(v_0)x. \end{aligned}$$

Znając postać wariancji lokalnej, możemy teraz wyznaczyć zmienność (wariancję) implikowaną Blacka-Scholesa jako całkę z wariancji lokalnej po najbardziej prawdopodobnej ścieżce \tilde{x}_t instrumentu bazowego od ceny instrumentu bazowego w chwili t do ceny wykonania w momencie wygaśnięcia opcji T . Okazuje się, \tilde{x}_t jest w przybliżeniu linią prostą (w przestrzeni logarytmicznej) o postaci $\tilde{x}_t \approx \frac{t}{T} x_T$. Stąd już łatwo:

$$\begin{aligned} \sigma_{BS}^2(K, T) &\approx \frac{1}{T} \int_0^T v_{loc}(\tilde{x}_t, t) dt \\ &\approx \text{const} + \frac{1}{T} \int_0^T \rho\eta\beta(v_0)\tilde{x}_t dt \\ &\approx \text{const} + \frac{1}{T} \int_0^T \rho\eta\beta(v_0)\frac{t}{T}x_T dt \\ &= \text{const} + \frac{1}{2}\rho\eta\beta(v_0)x_T, \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie wielokropek oznacza stałą bez znaczenia dla dalszego wywodu. \square

Skoro $\sigma_{BS}^2(K, T) \approx \dots + \frac{1}{2}\rho\eta\beta(v_0)x_T$ to pochodna jest dana jako

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{BS}^2(x, t) = \frac{\rho\eta}{2}\beta(v_0). \tag{11}$$

Ponieważ $\sigma_{BS}^2(x, t)$ ma interpretację nachylenia zmienności implikowanej w funkcji moneyness, to tym samym otrzymaliśmy ważny wniosek.

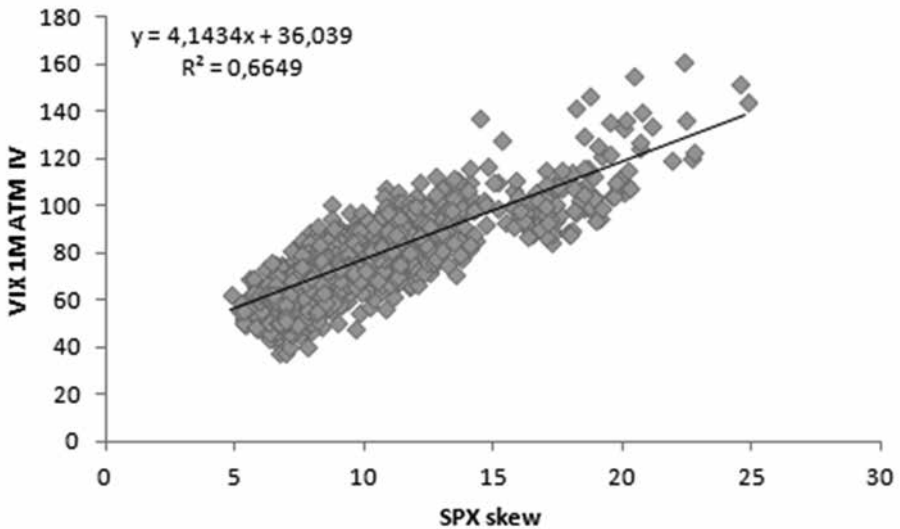
Wniosek 2. *W modelach zmienności stochastycznej uśmiech zmienności instrumentu bazowego jest proporcjonalny do parametru η , czyli „zmienności zmienności”.*

Przenosząc ten wynik na obszar naszej analizy, możemy się spodziewać, że uśmiech zmienności w opcjach na SPX będzie skorelowany ze zmiennością zmienności SPX. Z kolei ponieważ sama zmienność zmienności powinna być skorelowana ze zmiennością implikowaną VIX, to ostatecznie na podstawie ogólnego modelu teoretycznego otrzymujemy testowalną hipotezę, że zmienność implikowana VIX powinna być skorelowana z uśmiechem zmienności SPX.

Aby zweryfikować tę hipotezę oszacowaliśmy prostą regresję liniową zmienności implikowanej z opcji na VIX na uśmiech zmienności implikowanej w opcjach na SPX. Zmienność implikowaną VIX sparametryzowaliśmy jako interpolowaną jednomiesięczną zmienność implikowaną ATM. Z kolei uśmiech zmienności SPX (SPX skew) definiujemy jako różnicę jednomiesięcznych zmienności implikowa-

nych z opcji o cenach wykonania odpowiadających 90% i 120% ATMF, które wydają się dość płynne. Do estymacji regresji użyliśmy danych dziennych z serwisu Bloomberg za okres od stycznia 2010 r. do końca grudnia 2013 r. Wyniki przedstawia Wykres 4. Dopasowana zależność pomiędzy jednomiesięczną zmiennością implikowaną VIX (1M) a uśmiechem zmienności z opcji na SPX o analogicznym terminie wydaje się dość dobra ($R^2 = 0,66$), w szczególności w relacji do obserwowanego na rynku spreadu bid-ask. Na przykład 30 grudnia 2013 r. przewidywana wartość VIX ATM IV wyniosła 0,59 wobec 0,54 na rynku, przy spreadzie ask-bid ok. 6 pkt. proc.

Wykres 4. Zależność zmienności implikowanej VIX od uśmiechu zmienności SPX (styczeń 2010 r.-grudzień 2013 r.)



Źródło: dane Bloomberg, oprac. własne. Uwaga: jako referencyjny przyjęliśmy termin 1M, co wymagało interpolacji obserwowanych na rynku zmienności implikowanych o różnych terminach do wygaśnięcia. SPX skew jest zdefiniowany jako różnica jednomiesięcznych zmienności implikowanych dla poziomów strike 120% i 90% względem ATMF. Dopasowana metodą MNK zależność ma postać $VIX\ 1M\ IV = 4,1434 \times SPX\ skew + 36,039$ przy $R^2 = 0,6649$.

3.2 Struktura terminowa zmienności implikowanej

W sekcji 3.1 wykazaliśmy istnienie silnej korelacji pomiędzy uśmiechem zmienności SPX a jednomiesięczną zmiennością implikowaną VIX ATM. Wynik ten pozwala już “wycenić” opcje na VIX, ale tylko te o terminie 1M i cenie wykonania równej kursowi terminowemu. Aby móc wyceniać dowolną opcję waniliową na VIX konieczne jest sparametryzowanie całej powierzchni zmienności – tj. powiązanie SPX skew ze zmiennościami implikowanymi o innych terminach i dla innych poziomów strike. Poniżej proponujemy więc naturalny model dla struktury

terminowej zmienności implikowanej VIX ATM, a w kolejnej sekcji przedstawimy parametryzację uśmiechu zmienności VIX.

Bez przyjęcia konkretnych założeń na temat funkcji $\alpha(\cdot)$ i $\beta(\cdot)$ trudno jest sformułować postać analityczną struktury terminowej zmienności implikowanej. Ponieważ jednak naszym celem nie jest budowa formalnego modelu wyceny *sensu stricto*, a jedynie wyprowadzenie ugruntowanych teoretycznie intuicji empirycznych, w dalszym ciągu rozważamy uszczegółowienie modelu (4) do popularnej i często wykorzystywanej postaci Coxa-Ingersolla-Rossa tj. z $\alpha(v) = \lambda(\bar{v} - v)$ i $\beta(v) = 1$ (por. Cox, Ingersoll Jr, i Ross 1985). Parametr $\bar{v} > 0$ określa długoterminową średnią zmienności, a $\lambda > 0$ szybkość powrotu natychmiastowej wariancji do \bar{v} .⁸

Równanie (8) przyjmuje zatem postać:

$$dv_t = \lambda(\bar{v} - v)dt + \rho\eta \left[dx_t + \frac{1}{2}v_t \right] + \phi\eta\sqrt{v_t}d\bar{Z}_1. \quad (12)$$

Bezwarunkowa wartość oczekiwana natychmiastowej wariancji w chwili t ma postać $v_t = (v_0 - \bar{v})\exp(-\lambda t) + \bar{v}$. Całkowita wariancja $\omega(t)$ zrealizowana do czasu t będzie więc po prostu całką z wariancji natychmiastowych:

$$w_t = \int_0^t v_s ds = (v_0 - \bar{v}) \frac{1 - \exp(-\lambda t)}{\lambda} + \lambda t. \quad (13)$$

Gatheral (2006) pokazuje, że analogiczną - malejącą wykładniczo - postać będzie miała zmienność implikowana Blacka-Scholesa, wyznaczona przez scałkowanie wariancji lokalnej po najbardziej prawdopodobnej ścieżce instrumentu bazowego od wartości początkowej do wartości w chwili T .

Biorąc zatem pod uwagę przedstawione wyżej argumenty teoretyczne, naturalne wydaje się założenie, że zmienność implikowana ATM w dowolnym terminie wyraża się następującym równaniem

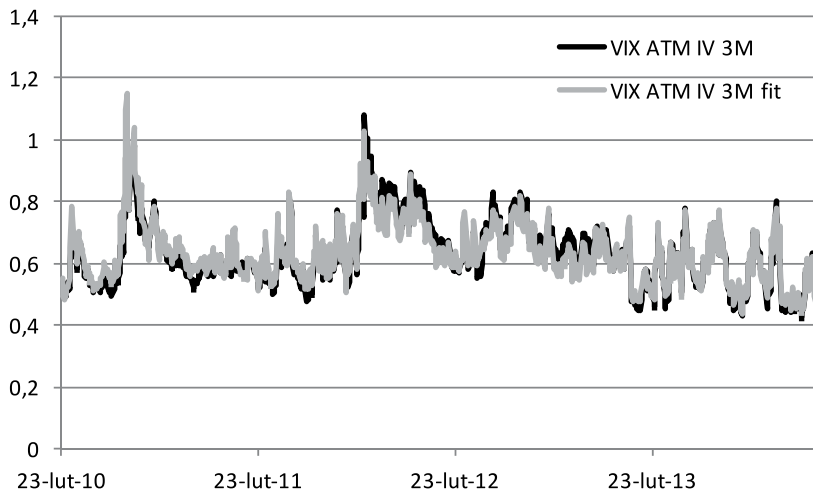
$$\sigma(t) = \Sigma + (\sigma_{1M}(t) - \Sigma)e^{(1M-t)\lambda}, \quad (14)$$

gdzie Σ jest długookresową wartością średnią, a λ szybkością, z jaką zbiega do niej $\sigma(t)$. Ponieważ w naszym przypadku punktem odniesienia jest zmienność jednomiesięczna σ_{1M} (oszacowana w oparciu o SPX 1M skew, por. Wykres 4, to właśnie ona pełni rolę parametru v_0 występującego w równaniu (13). Parametry Σ i λ zostały oszacowane na podstawie minimalizacji błędu średniokwadratowego z dopasowania równania (14) do szeregów czasowych zmienności implikowanej VIX ATM 1M, 2M i 3M od stycznia 2010 r. do końca grudnia 2013 r. (dane dzien-

⁸ U Coxa, Ingersolla i Rossa proces tej postaci służy do modelowania struktury terminowej stóp procentowych. Heston (1993) zastosował ten sam typ równania w modelu dynamiki zmienności.

ne). Oszacowane wartości parametrów wynoszą $\Sigma = 0,45$ i $\lambda = 3,8$. Średni błąd oszacowania (w wartości bezwzględnej) wyniósł 2,3 pkt. proc. dla zmienności 2M i 2,7 pkt. proc. dla zmienności 3M, czyli mniej niż średni spread ask-bid. Wykres 5 przedstawia wartości empiryczne trzymiesięcznej zmienności implikowanej na tle wartości dopasowanych na podstawie modelu.

Wykres 5. Wartości empiryczne VIX ATM 3M IV i dopasowane na podstawie modelu: $\sigma(t) = 0,45 + \sigma_{1M} \exp(3,8 \times 1M-t)$.



Źródło: dane Bloomberg, oprac. własne.

3.3. Uśmiech zmienności VIX

Wyniki dwóch poprzednich sekcji pozwalają powiązać obserwowany na rynku uśmiech zmienności SPX ze zmiennością implikowaną VIX ATM o dowolnym terminie. Ostatnim krokiem do pełnego sparametryzowania powierzchni zmienności VIX jest więc opis zmienności implikowanej VIX w funkcji ceny wykonania. Wygodnym narzędziem do tego celu jest model uśmiechu zmienności SABR (Hagan, Kumar, Lesniewski, Woodward, 2002), w którym dynamika instrumentu bazowego, kontraktu futures f_t^T zapadającego w T , jest opisana następującymi równaniami⁹:

⁹ Hagan, Kumar, Lesniewski, Woodward, (2002) oznaczyli zmienność przez α i akronim SABR miał oznaczać “stochastic alpha-beta-rho”, tj. zmienność stochastyczna α sparametryzowana przez β i ρ – korelację z instrumentem bazowym. Ponieważ jednak wykształciła się dość długa tradycja oznaczania zmienności literą σ , w dalszym ciągu pozwalamy sobie zmodyfikować oryginalną notację Hagana i in.

$$\begin{aligned}
 df_t^T &= (f_t^T)^{\beta^T} \sigma_t^T dZ_t^T \\
 d\sigma_t^T &= \eta^T \sigma_t^T dW_t^T \\
 dZ_t^T dW_t^T &= \rho dt
 \end{aligned} \tag{15}$$

Zgodnie z konwencją przyjętą wyżej, η oznacza zmienność zmienności, a ρ jest stałym współczynnikiem korelacji procesów dZ i dW . W modelu β i ρ określają nachylenie krzywej zmienności. W szczególnym przypadku, gdy $\beta = 0$, (15) redukuje się do modelu Bacheliera dla instrumentu bazowego (ze zmiennością stochastyczną), z kolei dla $\beta = 1$ otrzymujemy lognormalną dynamikę instrumentu bazowego znaną z modelu Blacka-Scholesa. Równania (15) są wyrażone w odpowiedniej mierze martyngałowej, w której stopa terminowa jest pozbawiona dryfu. Z założenia SABR opisuje krzywą zmienności implikowanych w funkcji ceny wykonania dla ustalonego terminu kontraktu futures T . Innymi słowy, parametry β , ρ , η są wielkościami stałymi, właściwymi dla danego terminu wygaśnięcia kontraktu futures, co usprawiedliwia zastosowanie przez nas indeksu górnego T w równaniach (15)¹⁰. W tym sensie SABR nie jest modelem całej powierzchni zmienności, lecz raczej uśmiechów zmienności dla poszczególnych T – dla każdego terminu T należy bowiem dopasować odrębną krzywą $\sigma^T(K)$ scharakteryzowaną przez parametry $(\beta^T, \rho^T, \eta^T)$. Jak przekonują Rebonato, McKay, White (2011), nie świadczy to wcale o defekcie modelu SABR, który można traktować jako swoiste narzędzie do implikowania parametrów $(\beta^T, \rho^T, \eta^T)$ bardziej ogólnego modelu powierzchni zmienności.

Bezspreczną zaletą SABR jest natomiast możliwość analitycznego wyprowadzenia zmienności implikowanej w funkcji ceny wykonania, tj. możliwość wyprowadzenia wzoru na uśmiech zmienności. Jak pokazują Hagan, Kumar, Lesniewski, i Woodward (2002) cena europejskiej opcji call wyraża się wzorem Blacka:

$$C_t = \exp(-rT) [f_t N(d_+) - K N(d_-)], \tag{16}$$

przy

$$d_{\pm} = \frac{\log(f/K) \pm \frac{1}{2}\sigma_B^2 T}{\sqrt{\sigma_B^2 T}} \tag{17}$$

i zmienności implikowanej $\sigma_B(f, K)$, która wyraża się wzorem¹¹

$$\begin{aligned}
 \sigma_B(f, K) &= \frac{\sigma}{(fK)^{(1-\beta)/2} \left\{ 1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \log^2(f/K) + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \log^4(f/K) + \dots \right\}} \cdot \frac{z}{\chi(z)} \cdot \\
 &\cdot \left\{ 1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\sigma^2}{(fK)^{1-\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho\beta\eta\sigma}{(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \eta^2 \right] T + \dots \right\}
 \end{aligned} \tag{18}$$

¹⁰ Por. też obszerne omówienie technicznych aspektów modelu SABR w Rebonato, McKay, White (2011).

¹¹ Poniższe wzory zostały wyprowadzone techniką perturbacji. Ze względów prezentacyjnych pominięto wyrażenia nieistotne, których uwzględnienie zmniejszyłoby błąd dopasowania maksymalnie o rząd punktu bazowego.

Dodatkowo $z = \frac{\eta}{\sigma} (fK)^{(1-\beta)/2} \log(f/K)$ oraz

$\chi(z) = \log\left(\sqrt{1 - 2\rho z + 2z^2} + z - \rho\right) - \log(1 - \rho)$. W szczególnym przypadku zmienności implikowanej dla opcji ATM otrzymujemy

$$\sigma_{ATM} = \frac{\sigma}{f^{1-\beta}} \left\{ 1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\sigma^2}{f^{2-2\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho\beta\eta\sigma}{f^{1-\beta}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \eta^2 \right] T + \dots \right\} \quad (19)$$

Ogólnie rzecz biorąc, kalibracja modelu SABR polega na znalezieniu takiej kombinacji parametrów $\sigma, \beta, \rho, \eta$, aby dla danych T oraz f/K zmienności implikowane wyznaczone zgodnie ze wzorem (18) różniły się możliwie najmniej od tych obserwowanych na rynku. Ponieważ, jak pokazują Hagan, Kumar, Lesniewski, Woodward (2002), do tych samych danych można z równym powodzeniem skalibrować uśmiechy z różnymi wartościami β , oszacowanie tego parametru powinno być niezależne od samej kalibracji. Można na przykład estymować β na podstawie regresji liniowej, korzystając z faktu, że po obustronnym zlogarytmowaniu (19) otrzymuje się

$$\log(\sigma_{ATM}) \approx \log(\sigma) - (1 - \beta) \log(f)$$

Biorąc pod uwagę stabilność rozwiązań numerycznych i argumenty teoretyczne przemawiające za tym, że zmienność powinna mieć rozkład zbliżony do lognormalnego przyjmujemy w dalszym ciągu $\beta = 0,999$ ¹² Kolejne etapy kalibracji przebiegały następująco:

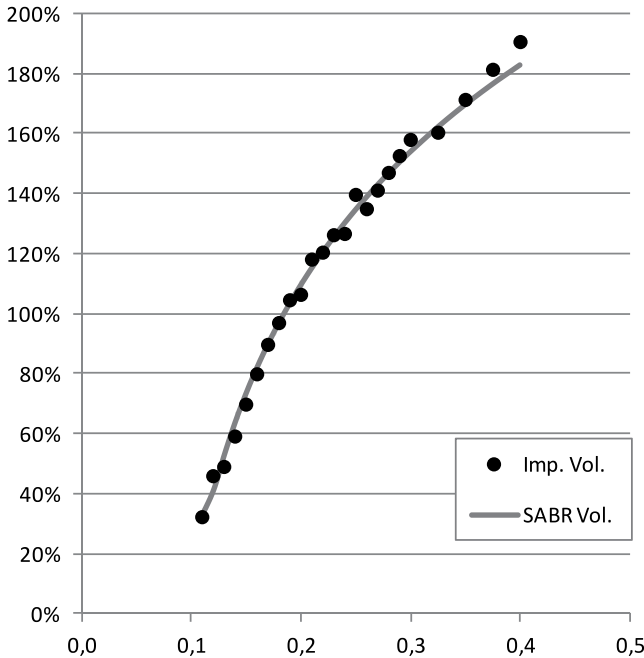
- dla danego T znajdujemy rynkową zmienność implikowaną σ_{ATM} ¹³
- na podstawie σ_{ATM} oraz T rozwiązujemy równanie (19) ze względu na σ^T ;
- pozostałe dwa parametry ρ i η wyznaczamy numerycznie na podstawie następującego warunku $(\rho^T, \eta^T) = \arg \min_{\beta, \rho} \sum_i [\sigma_i^R - \sigma_B(f, K_i, \sigma^T, \rho, \eta)]^2$ gdzie σ_i^R to rynkowa zmienność implikowana.

Procedurę tę powtarzamy dla wszystkich kwotowanych na rynku terminów wygaśnięcia opcji. Na 31 grudnia 2013 r. było to 6 kontraktów: opcje styczniowe (22 dni), lutowe (50 dni), marcowe (77 dni), kwietniowe (106 dni), majowe (141 dni) i czerwcowe (169 dni). Przykładową kalibrację dla opcji z terminem 22 stycznia 2014 przedstawia Wykres 6.

¹² Parametr β nie może być równy 1 ze względu na stabilność numeryczną estymacji.

¹³ W wypadkach kiedy σ_{ATM} nie jest dostępne, interpolujemy dostępne zmienności metodą cubic splines opisaną np. w Hagan i West (2008).

Wykres 6. Dopasowanie modelu SABR do opcji na VIX na styczeń 2014 r. (22 dni)



Źródło: Oprac. własne. Na osi odciętych cena wykonania podana w jednostkach k/100.

Uwaga: zmienność implikowana SABR sparametryzowana przez $\sigma = 0,411$, $\beta = 0,999$, $\rho = 0,666$, $\eta = 3,644$.

Jak widać, dopasowanie modelu jest bardzo dobre. Co ciekawe parametr ρ nie zmienia się istotnie w zależności od terminu opcji, natomiast wartość ν wydaje się zmniejszać potęgowo z T jak $\sim 0,5T^{-0,75}$. Oba wyniki są zbliżone do tych otrzymanych przez Gatherala (2008). Łącząc wszystkie otrzymane dotychczas wyniki możemy już w pełni sparametryzować powierzchnię zmienności VIX:

Fakt 3. Dla dowolnego T , powierzchnia zmienności VIX daje się sparametryzować przez następujący zestaw parametrów:

Wniosek 4.

$$\sigma_{ATM}^{1M} = 4,6 \times SPX\ 1M\ skew_{90-120} + 29,7$$

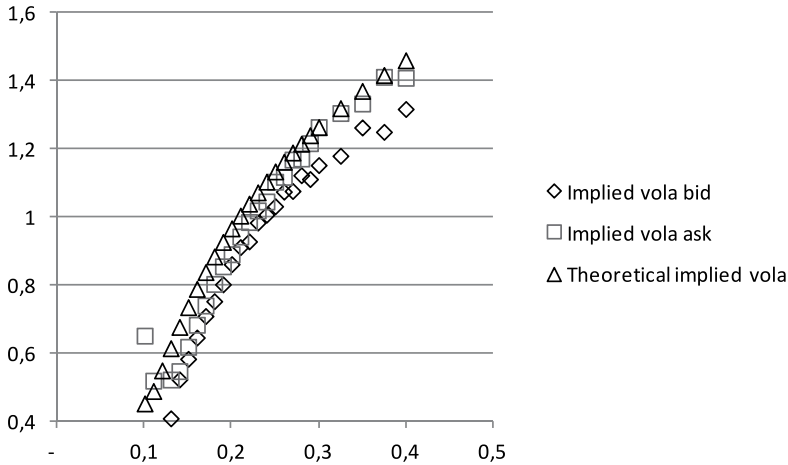
$$\sigma_{ATM}^T = 0,45 + (\sigma_{ATM}^{1M} - 0,45) e^{3,8 \frac{(30-T)}{365}}$$

$$\beta^T = 0,999$$

$$\rho^T = 0,71$$

$$\eta^T = 0,5 \times T^{-0,75}$$

Wykres 7. Zmienności implikowane teoretyczne na tle rynkowych dla opcji na VIX 31 grudnia 2013 r. z terminem 19 lutego 2014 r.



Źródło: dane rynkowe Bloomberg, oprac. własne. Na osi odciętych cena wykonania podana w jednostkach $k/100$. Uwaga: IV bid, IV ask i IV (model) oznaczają odpowiednio zmienność implikowaną bid, ask i teoretyczną, obliczoną na podstawie modelu.

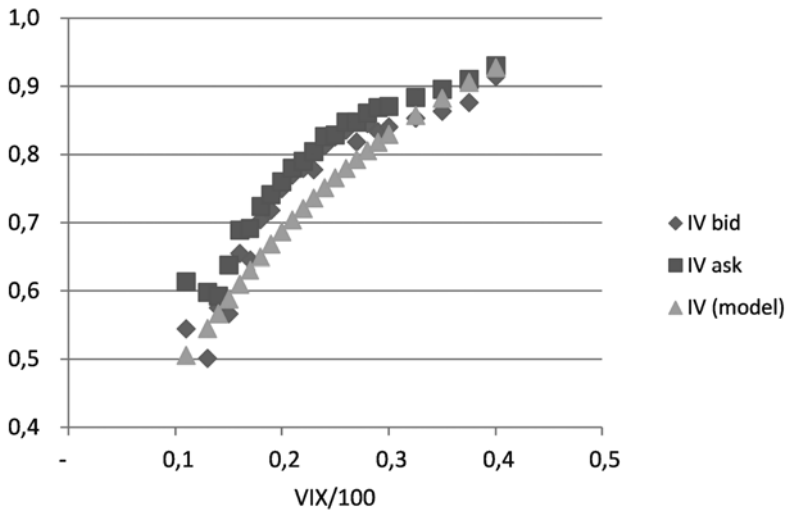
Wykorzystując formuły przedstawione we Wniosku 2 możemy otrzymać wartości zmienności implikowanych dla dowolnego terminu i poziomu strike. Inaczej mówiąc, Wniosek 2 pozwala wycenić dowolną opcję na VIX. Wykresy 7 i 8 przedstawiają obliczone w ten sposób teoretyczne wartości zmienności implikowanych opcji na VIX dla dwóch różnych dat (6 czerwca 2013 r. i 31 grudnia 2013 r.) i dwóch terminów (odpowiednio 104 dni i 50 dni). Jak widać, ceny teoretyczne są w obu wypadkach zbliżone do rynkowych, a dla opcji o krótszym terminie mieszczą się nawet w przedziale cen bid-ask.

4. Podsumowanie

Celem niniejszego artykułu było znalezienie kilku ugruntowanych w teorii, ale łatwych do praktycznej implementacji, reguł kciuka, które pozwalałyby na parametryzację powierzchni zmienności VIX. Przedstawione przez nas reguły opierają się na związku uśmiechu zmienności S&P 500 ze zmiennością VIX i mimo swej prostoty pozwalają z dość dobrą dokładnością otrzymać ceny zbliżone do tych kwotowanych na rynku. Oczywiście zaproponowane przez nas rozwiązanie nie może być substytutem pełnego formalnego modelu wyceny opcji na VIX. Jest ono raczej rodzajem praktycznego „kalkulatora”, który na podstawie cen bardziej płynnych instrumentów (opcje na S&P 500) przybliży ceny instrumentów mniej płynnych. Z tej perspektywy naturalnym zastosowaniem zaproponowanej powyżej metody byłaby parametryzacja powierzchni zmienności i wycena opcji mniej płynnych niż te na VIX – np. uruchomionych 4 lata temu opcji na europejski indeks zmienności VSTOXX. Dotychczasowe wyniki można by też pogłębić od strony teoretycznej,

podejmując próbę lepszego opisu struktury terminowej zmienności zmienności η w modelach stochastycznych. Jak argumentowaliśmy wyżej, wybór przyjętej formy funkcyjnej $\eta(T) = 0,5T^{0,75}$ znajduje częściowe oparcie w literaturze, jednak należy pamiętać, że został uzyskany na bardzo niewielkiej próbie obserwacji (aktualnie kwotowanych jest tylko 6 terminów dla opcji na VIX). Bardziej precyzyjne zbadanie struktury terminowej η pozwoliłoby ugruntować uniwersalność naszych dotychczasowych wstępnych wyników.

Wykres 8. Zmienności implikowane teoretyczne na tle rynkowych dla opcji na VIX 6 czerwca 2013 r. z terminem 18 września 2013 r.



Źródło: dane rynkowe Bloomberg, oprac. własne. Na osi odciętych cena wykonania podana w jednostkach $k/100$. Uwaga: IV bid, IV ask i IV (model) oznaczają odpowiednio zmienność implikowaną bid, ask i teoretyczną, obliczoną na podstawie modelu.

Literatura

- Alexander, C. (2009): *Market Risk Analysis, Pricing, Hedging and Trading Financial Instruments*, vol. 3. Wiley. com.
- Black, F. (1976): "The pricing of commodity contracts", *Journal of Financial Economics*, 3(1), 167-179.
- Black, F. oraz M. S. Scholes (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-54.
- Carr, P. oraz D. Madan (2001): "Towards a Theory of Volatility Trading", [w:] *Volatility*, (red.) R. Jarrow, str. 417-427. Risk Publications.
- Carr, P. oraz L. Wu (2006): "A Tale of Two Indices", *The Journal of Derivatives*, 13(3), 13-29.
- CBOE (2003): "The CBOE Volatility Index - VIX", <http://www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf>.
- Cont, R. oraz T. Kokholm (2011): "A consistent pricing model for index options and volatility derivatives", *Mathematical Finance*.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll Jr oraz S. A. Ross (1985): "A theory of the term structure of interest rates", *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, str. 385-407.
- Derman, E., K. Demeterfi, M. Kamal oraz J. Zou (1999): "More Than You Ever Wanted To Know About Volatility Swaps", Quantitative strategies research notes, Goldman Sachs.
- Derman, E. oraz I. Kani (1998): "Stochastic implied trees: Arbitrage pricing with stochastic term and strike structure of volatility", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1(01), 61-110.
- Dupire, B. (2004): "A unified theory of volatility", Working paper, Paribas Capital Markets.
- Gatheral, J. (2006): *The Volatility Surface - A Practitioner's Guide*. John Wiley & Sons Ltd.
- Gatheral, J. (2008): "Consistent modeling of SPX and VIX options", .
- Grünbichler, A. oraz F. A. Longstaff (1996): "Valuing futures and options on volatility", *Journal of Banking and Finance*, 20(6), 985-1001.
- Hagan, P. S., D. Kumar, A. S. Lesniewski oraz D. E. Woodward (2002): "Managing smile risk", *Wilmott Magazine*, str. 84-108.
- Hagan, P. S. oraz G. West (2008): "Methods for constructing a yield curve", *WILMOTT Magazine*, May, str. 70-81.
- Heston, S. L. (1993): "A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options", *Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343.
- Hull, J. oraz A. White (1987): "The pricing of options on assets with stochastic volatilities", *The Journal of Finance*, 42(2), 281-300.
- Jablecki, J., R. Kokoszczynski, P. Sakowski, R. Ślepaczuk oraz P. Wójcik (2014): "Instrumenty pochodne na zmienność – nowa klasa aktywów?", ocz. na rec. w czasopiśmie „ekonomista”, WNE UW.

- Lin, Y.-N. oraz C.-H. Chang (2010): “Consistent modeling of S&P 500 and VIX derivatives”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 34(11), 2302-2319.
- Merton, R. C. (1973): “Theory of Rational Option Pricing”, *Bell Journal of Economics*, 4(1), 141-183.
- Moran, M. T. oraz S. Dash (2007): “VIX futures and options: Pricing and using volatility products to manage downside risk and improve efficiency in equity portfolios”, *The Journal of Trading*, 2(3), 96-105.
- Rebonato, R., K. McKay oraz R. White (2011): “The SABR/LIBOR Market Model: Pricing, calibration and hedging for complex interest-rate derivatives”.
- Sepp, A. (2008): “VIX option pricing in a jump-diffusion model”, *Risk Magazine*, str. 84-89.
- Whaley, R. E. (1993): “Derivatives on Market Volatility: Hedging Tools Long Overdue”, *Journal of Derivatives*, 1, 71-84.
- Wilmott, P. (2006): *Paul Wilmott On Quantitative Finance*. John Wiley & Sons Ltd.

