Szeregi czasowe
pomiar przeciętnej dynamiki

Igor Timofiejuk, profesor
Katedra Ekonomii Politycznej, WNE, UW

Przyporządkowując odmianom czasu, tzn. momentom lub okresom, a więc cesze (zmiennej) niezależnej, egzogenicznej względem procesu lub zjawiska, adekwatnie im odpowiadające wartości liczbowe zmiennej zależnej badanego procesu lub zjawiska otrzymamy dwuwierszową albo dwukolumnową tablicę statystyczną zwaną szeregiem czasowym (chronologicznym, rozwojowym lub dynamicznym). Analiza szeregów chronologicznych jest obszerną dziedziną badań dynamiki. Jednym z narzędzi pomiaru dynamiki jest stopa (tempo) wzrostu, a zwłaszcza przeciętne (średnie) tempo (stopa) wzrostu[1].

Powszechnie, a właściwie prawie wyłącznie stosowaną, metodą rachunku przeciętnego tempa wzrostu jest liczenie go ze wzoru na ważoną systemem wag jednostkowych średnią geometryczną, krótko zwaną nieważoną średnią geometryczną.

Jeżeli mamy odmiany czasu, momenty lub okresy t_0, t_1, …, t_n i adekwatnie odpowiadające im wartości zmiennej zależnej $Y_0, Y_1, \ldots Y_n$ oraz gdy $Y_i > 0$ (i = 0, 1, …, n), to wówczas średnia stopa wzrostu (r_g) wynosi:

$$r_g = \sqrt[n]{Y_n : Y_0} - 1 \text{ lub } r_g = (Y_n : Y_0)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Jeśli w szeregu czasowym policzymy indeksy łańcuchowe $x_1 = Y_1{:}Y_0$, $x_2 = Y_2{:}Y_1$, …, $x_n = Y_n{:}Y_{n-1}$, to wówczas:

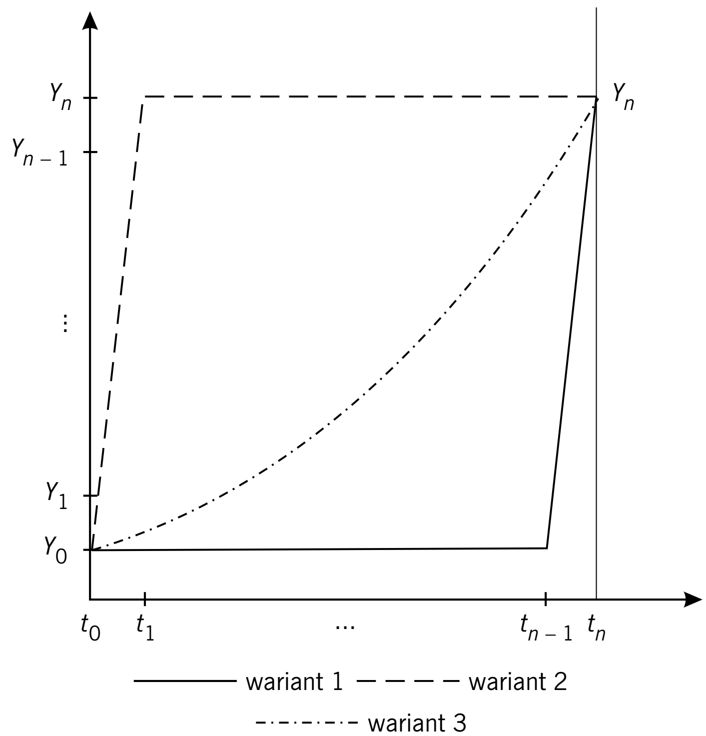
$$r_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} - 1.$$

Jak łatwo zauważyć, o wartości liczbowej przeciętnego tempa wzrostu decydują tylko dwa wyrazy szeregu chronologicznego, a więc początkowy (Y_0) i końcowy (Y_n). Wyrazy „środkowe” Y_1, Y_2, …, Y_{n-1} nie mają wpływu na wynik rachunku, są więc z definicji przez metodę nieważonej średniej geometrycznej ignorowane. A więc, dla wszystkich trzech wariantów:

1) $Y_0 = Y_1 = \ldots Y_{n-1} < Y_n$
2) $Y_0 < Y_1 = \ldots Y_{n-1} = Y_n$

[1] Ściśle rzecz biorąc należy mówić o tempie (stopie) przyrostu. Jednakże w ekonomii przyjęło się nazywać tę miarę stopą (tempem) wzrostu i zatem pozostajemy przy tej terminologii.

3) $Y_0 < Y_1 < \ldots < Y_{n-1} < Y_n$
przedstawionych na rysunku:



Rys. 1.
Warianty trajektorii wzrostu

otrzymamy tę samą wartość liczbową przeciętnego tempa wzrostu. A przecież trajektorie wzrostu różnią się diametralnie między sobą. Biorąc przykład z dziedziny akademickiej: gdyby zapytać, jaką drogę dla zmian swego stypendium w ciągu pięciu lat studiów wybrałby dowolny student, to odpowiedź byłaby zapewne jednoznaczna, czyli wariant drugi.

I. Moje studia nad zagadnieniami wzrostu gospodarczego w pierwszej połowie lat sześćdziesiątych ubiegłego stulecia skłoniły do poszukiwania dróg rozwiązania tego problematu. Wtedy też ukazały się pierwsze moje publikacje na ten temat. Rozwiązanie problemu tkwi oczywiście w uwzględnieniu wszystkich wyrazów szeregu chronologicznego, a nie tylko skrajnych, jak to czyni *ex definitione* metoda r_g.

Istnieją tu tylko dwie drogi prowadzące do celu:

1) traktując, że zmienna zależna jest addytywną funkcją czasu, wówczas można dodać do siebie wyrazy szeregu chronologicznego, lub

2) przyjmując, iż są tu multiplikatywne związki zmiennej zależnej z czasem, jako zmienną niezależną, można dokonać wymnożenia wyrazów szeregu dynamicznego.

Pierwsza droga doprowadziła mnie do opracowania metody nazwanej $\bar{r}$ (od angielskiego *rate* — stopa, tempo i kreska nad literą jako powszechnie przyjęty sposób oznaczania średniej, przeciętnej).

Gdy mamy okresy (momenty) czasu $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n$ i im adekwatnie przyporządkowane wielkości $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}, Y_n$, to wówczas indeksy łańcuchowe $x_1 = Y_1{:}Y_0$, $x_2 = Y_2{:}Y_1$, …, $x_n = Y_n{:}Y_{n-1}$ pozwalają na wyrażenie kolejnych wyrazów szeregu czasowego przez wartość początkową Y_0 i właśnie te indeksy łańcuchowe, a mianowicie:

$Y_1 = Y_0 \cdot x_1$

$Y_2 = Y_1 \cdot x_2 = Y_0 \cdot x_1 \cdot x_2$

………………………………..

$Y_n = Y_{n-1} \cdot x_n = Y_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$.

Sumując lewe strony równań otrzymuje się:

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Jak widać sumowanie zaczyna się od wyrazu pierwszego, a nie zerowego. Sumując zaś prawe strony równań otrzymujemy:

$$Y_0 \cdot x_1 + Y_0 \cdot x_1 \cdot x_2 + \ldots + Y_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = Y_0(x_1 + x_1 \cdot x_2 + \ldots + x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n).$$

Wszystkie wyrazy występujące w sumowanych równaniach są wyrazami rzeczywistego szeregu chronologicznego i na ich podstawie policzonych indeksów łańcuchowych. Faktyczny (rzeczywisty) szereg chronologiczny można traktować jako postęp geometryczny o „zmiennym ilorazie" (cudzysłów jest tu oczywiście niezbędny, w matematyce bowiem ciąg liczb o stałym ilorazie kolejno następujących elementów ciągu nazywa się postępem geometrycznym).

Należy więc znaleźć taką średnią wartość $\bar{x}$ teoretyczną, aby z niej i faktycznego wyrazu Y_0 zbudować równanie z wyrazów rzeczywistego szeregu rozwojowego, czyli

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Wówczas otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = Y_0\left(\bar{x} + \bar{x}^2 + \ldots + \bar{x}^n\right).$$

Dzieląc obie strony równania przez Y_0 i oznaczając

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i : Y_0 \ \text{przez}\ a_n$$

oraz zmieniając szyk składników dodawania od maksymalnego wykładnika potęgi do minimalnego powstaje równanie:

$$\overline{x}^{n+} + \overline{x}^{n-1} + \ldots + \overline{x}^{2} + \overline{x} - a_n = 0,$$

które jest szczególnym przypadkiem równania ogólniejszej postaci:

$$a_0x^{\mathrm{n}} + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + \mathrm{a}_{n-1}x + a_n = 0.$$

Tę postać równania określa się mianem wielomianu lub funkcji całkowitej wymiernej[2].

Poszukiwaną liczbę pierwiastków tego równania, czyli funkcji całkowitej wymiernej określa twierdzenie Descartesa-Harriota, które jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Sturma (z 1829 r.), o dokładnej liczbie pierwiastków wielomianów dowolnych stopni. Twierdzenie Descartesa-Harriota ma następujące brzmienie: „Jeśli $\varphi(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \in R(x)$, $(a_0 \neq 0)$ to ilość dodatnich pierwiastków tego wielomianu, liczonych z właściwą wielokrotnością, jest równa liczbie zmian znaku w ciągu $a_0, a_1, \ldots, a_n$ lub jest od niej mniejsza o liczbę parzystą"[3].

Wielomian $f(x) = \overline{x}^{n} + \overline{x}^{n-1} + \ldots + \overline{x}^{2} + \overline{x} - a_n$, z którego rozwiązania można uzyskać wartość liczbową średniej (przeciętnej) stopy wzrostu wedle proponowanej tu metody, w ciągu $a_0, a_1, \ldots, a_{\mathrm{n}}$ ma następujące wartości liczbowe: $1, 1, \ldots, 1, -a_n$ i stosując twierdzenie Descartesa-Harriota do występujących tu konkretnych warunków zadania, stwierdzamy, iż liczba zmian znaku wynosi dokładnie jeden. A zatem, równanie to posiada dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty dodatni. I właśnie ten jedyny pierwiastek rzeczywisty dodatni, rozpatrywanego tu wielomianu, jest poszukiwanym ilorazem postępu geometrycznego, czyli $\overline{x}$.

Pytanie, które trzeba tu niezbędnie postawić, brzmi: jak ten pierwiastek obliczyć? Problem bowiem się komplikuje, jeśli się zważy, iż istnieją dokładne wzory pozyskiwania pierwiastków równań tylko dla wielomianu czwartego stopnia. Tę kwestię rozwiązano, wykorzystując współczesną ETO, i zbudowano odpowiednie tablice[4]. Kierowano się tu nie tylko sposobem zaradzenia problematowi od strony merytorycznej, ale i dlatego, że użyteczność metody ma sens wówczas, gdy liczenie przeciętnej stopy wzrostu cechuje prostota i szybkie uzyskiwanie wartości liczbowych, a więc wręcz automatyzm. Metoda $\overline{r}$ posiada wiele właściwości, a m.in. z jej tablic można dokonywać rachunku

[2] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, wyd. IV, Warszawa 1966, s. 81.

[3] A. Mostowski i M. Stark, *Algebra wyższa*, cz. 2, Warszawa 1954, s. 69.

[4] Tablice takie zamieszczono najpierw w mojej książce *Stopa wzrostu gospodarczego. Metody liczenia*, PWE, Warszawa 1973. Następnie ukazały się dwa zeszyty metodyczne GUS, nr 41 z 1980 roku oraz 75 z 1990 r. pod tytułem *Tablice średniego tempa wzrostu według metody* $\overline{r}$. Najobszerniejszą publikacją tablic jest moja książka *Metoda* $\overline{r}$. *Teoria i tablice*, Fundacja Naukowa Taylora, Warszawa 1993, gdzie również w trzech językach (polski, rosyjski, angielski) przedstawiono zwięzły wykład teorii metody $\overline{r}$, jej właściwości i sposoby korzystania z tablic dla różnych sposobów przedstawiania szeregów chronologicznych.

przeciętnego tempa wzrostu według metody nieważonej średniej geometrycznej[5]. W tym sensie metoda r_g staje się szczególnym przypadkiem metody $\bar{r}$.

II. Przyjmując założenie o multiplikatywnym charakterze związku zmiennej zależnej z czasem, rozwiązanie problemu uwzględnienia wszystkich wyrazów szeregu czasowego w liczeniu przeciętnego tempa wzrostu przedstawia się jak niżej.

Analogicznie, jak przy metodzie $\bar{r}$ — gdy mamy szereg dynamiczny

$$\begin{array}{l} t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n \\ Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y_n \end{array}$$

oraz indeksy łańcuchowe: $x_1 = Y_1{:}Y_0$, $x_2 = Y_2{:}Y_1$, …, $x_{n-1} = Y_{n-1}{:}Y_{n-2}$, $x_n = Y_n{:}Y_{n-1}$, to wówczas:

$$\begin{array}{l} Y_1 = Y_0 \cdot x_1 \\ Y_2 = Y_1 \cdot x_2 = Y_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_n = Y_{n-1} \cdot x_n = Y_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \end{array}$$

Mnożąc lewe strony równań otrzymuje się

$$Y_1 \cdot Y_2 \cdot \dots \cdot Y_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i.$$

Natomiast mnożąc prawe strony równań mamy $Y_0 x_1 \cdot Y_0 x_1 x_2 \cdot \dots \cdot Y_0 x_1 x_2 \dots x_n = Y_0{}^n(x_1 \cdot x_1 x_2 \dots x_1 x_2 \dots x_n)$. Należy więc teraz znaleźć takie $\hat{x}$, aby przy rzeczywistym Y_0 i $\hat{x}$ otrzymać ten sam iloczyn co rzeczywisty, tzn.:

$$\prod_{i=1}^{n} Y_i.$$

Przykładowo dla dwóch wyrażeń mamy:

$$\prod_{i=1}^{2} Y_i = Y_0^2(x_1 \cdot x_1 x_2) = Y_0^2 \hat{x}^3$$

i dla trzech wyrazów:

$$\prod_{i=1}^{3} Y_i = Y_0^3(x_1 \cdot x_1 x_2 \cdot x_1 x_2 x_3) = Y_0^3 \hat{x}^6.$$

Jak widać wykładnik potęgi przy $\hat{x}$ jest sumą wyrazów ciągu (postępu) arytmetycznego, co określa wzór:

$$\frac{(1+n)n}{2}.$$

---

[5] Por. I. Timofiejuk, *Przysposobienie tablic metody $\bar{r}$ do rachunku według metody r_g*, „Wiadomości Statystyczne” 1988 nr 1.

Zatem uogólniając uzyskuje się:

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i = \mathrm{Y}_0^n \hat{x}^{\frac{(1+n)n}{2}}, \text{ a więc}$$

$$\hat{x}^{\frac{(1+n)n}{n}} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i}{\mathrm{Y}_0^n}.$$

Logarytmując, uzyskuje się:

$$\frac{(1+n)n}{n} \log \hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \log \mathrm{Y}_i - n \log \mathrm{Y}_0, \text{ a zatem}$$

$$\log \hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log \mathrm{Y}_i - n \log \mathrm{Y}_0}{\frac{(1+n)n}{2}}.$$

Uwzględniając związek zachodzący między wskaźnikami (indeksami) i tempem (stopą) wzrostu, otrzymuje się tempo wzrostu według prezentowanej metody, czyli $\hat{r} = \hat{x} - 1$.

Jeżeli dynamika jest prezentowana przez szereg indeksów jednopodstawowych, to przyjmując, że podstawą jest okres (moment) zerowy i wynosi jeden indeks $x_{1/0}$, a więc $n \log x_{1/0} = n \cdot 0 = 0$, to wówczas otrzymuje się:

$$\log \hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log x_{i/0}}{(1+n)n},$$

gdzie $x_{i/0}$ — indeksy jednopodstawowe.

III. Nie sposób teraz nie zadać bardzo istotnego pytania, a mianowicie: która z proponowanych metod $\bar{r}$, czy też $\hat{r}$ prawidłowo uwzględnia wagę wszystkich wyrazów szeregu rozwojowego przy liczeniu przeciętnego tempa wzrostu? Przypomnijmy, iż metoda $\bar{r}$ zakłada addytywność zmiennej zależnej względem czasu, a metoda $\hat{r}$ — multiplikatywność.

Szeregi czasowe mają charakter multiplikatywny. Stąd logiczny wniosek: odpowiedniość do logiki procesów prezentowanych przez szeregi chronologiczne, w liczeniu ich średniej dynamiki zapewnia metoda $\hat{r}$. Ale czy rozbieżność rezultatów uzyskanych z metody $\bar{r}$ i metody $\hat{r}$ jest znacząca liczbowo? Odpowiedź jest zawsze ta sama: zależy to od konkretnego przypadku. Ale można tu się posłużyć w rozumowaniu metodą analogii. Tyczy się ona relacji wyników z tych samych liczb pozyskiwanych metodą średniej arytmetycznej i geometrycznej. Jeśli zatem mamy dwie liczby dodatnie a i b (a tu właśnie w szeregach czasowych o takich liczbach rzecz idzie) oraz $a > b$, a ich średnia arytmetyczna $a_1 = (\mathrm{a} + b){:}2$ i geometryczna $b_1 = \sqrt{a \cdot b}$, to wiadomo, że $a_1 > b_1$, a jednocześnie są zawarte między liczbami wyjściowymi $\mathrm{a} > a_1 > b_1 > b$. Wynika to z:

$$\frac{(a+b)}{2} - \sqrt{a \cdot b} = \frac{1}{2}\left(a - 2\sqrt{a \cdot b} + b\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 > 0.$$

Taka jest właściwość matematyczna.

Czy jednak te rozbieżności, tu już mamy na myśli różnice między wynikami z rachunku według metod $\overline{r}$ i $\hat{r}$, będą znaczące? W „normalnych" szeregach czasowych będą te różnice mało znaczące[6]. Zatem wniosek: nie ma większego znaczenia, czy rachunek przeprowadza się na podstawie metody $\overline{r}$ czy też $\hat{r}$. Decydować tu muszą względy praktyczne, np. takie, że dla rachunku wedle metody $\overline{r}$ są zbudowane tablice.

Na miejscu będzie także postawienie i innego pytania: czy w rachunku średniej stopy wzrostu należy stosować metodę r_g, czy też $\overline{r}$ lub $\hat{r}$. Sądzę, że metodzie $\overline{r}$ lub $\hat{r}$ ze względu na uwzględnianie przez nie wszystkich wyrazów szeregu chronologicznego przy liczeniu średniego tempa wzrostu należy się status określany łacińskim zwrotem *primus inter pares*. Jednakże uważam, że należy się tu kierować logiką i użytecznością praktyczną metod, a nie nawet najpiękniejszymi sentencjami lingwistycznymi. Nie należy stosować metody $\overline{r}$ lub $\hat{r}$ w miejsce r_g. Należy natomiast je stosować łącznie, tzn. $\overline{r}$ i r_g lub $\hat{r}$ i r_g, przez co uzyska się poprawniejszy i bogatszy merytorycznie wgląd w procesy dynamiki procesów czy zjawisk. Rzecz w tym, że $\overline{r} - r_g$ lub $\hat{r} - r_g$ wskazuje skalę i kierunek odchylania się procesów od wzrostu równomiernego[7], tzn. wzrostu, gdy z okresu na okres, lub z momentu na moment mamy tę samą stopę wzrostu. Moduły różnicy $\left|\overline{r} - r_g\right|$ lub $\left|\hat{r} - r_g\right|$ określają skalę nierównomierności, znak zaś tej różnicy określa kierunek odchyleń od procesu wzrostu równomiernego. Znak minus oznacza, iż w badanym czasie musiały następować okresy zwolnionego tempa wzrostu, czy nawet spadki absolutne rozmiarów badanej wielkości, natomiast znak plus oznacza, że występowały okresy przyspieszenia wzrostu w odniesieniu do wzrostu o stałej stopie, tzn. wzrostu równomiernego, równej r_g. Stwarza to możliwość określenia także względnej skali nierównomierności, a więc eliminację wpływu poziomu (wysokości) tempa wzrostu. Miarą tego będzie odniesienie różnicy $\overline{r} - r_g$ lub $\hat{r} - r_g$ do wartości liczbowej tempa wzrostu obliczonego metodą r_g, a więc wyrażenia $\left(\overline{r} - r_g\right): r_g$ czy też $\left(\hat{r} - r_g\right): r_g$. Te miary będą wyrażały nierównomierność, a więc niedoszacowanie lub przeszacowanie dynamiki wzrostu przez metodę r_g, a zarazem i kierunek odchylania się od trajektorii wzrostu równomiernego.

*

[6] Np. średnie miesięczne tempa wzrostu w 1992, 1993 i 1994 cen żywności wyniosły według $\overline{r}$: 2,95%; 2,03% i 1,75%, a według $\hat{r}$: 2,93%; 2,02% i 1,73%. I. Timofiejuk, *O poprawną wartość liczbową miesięcznej stopy inflacji*, „Wiadomości Statystyczne" 1996 nr 1, s. 20, tabl. 5.

[7] W przypadku wzrostu równomiernego obojętna jest metoda rachunku średniego tempa wzrostu, z definicji wzrostu równomiernego wynika bowiem $r_g = \overline{r} = \hat{r}$, a także i średniej arytmetycznej (r_a).

Myślę, iż przedstawione w tym artykule rozważania na temat pomiaru przeciętnego tempa (stopy) wzrostu dokładnie odpowiadają sposobowi postępowania ujętemu przez Karola Marksa w sformułowaniu: „Prawda to nie tylko wynik, ale także droga”.

A b s t r a c t

Time sequences—measurement of the average dynamics

The object of considerations are here the methods of measurement of the average (mean) rate of growth, that is, the measure which expresses the dynamics of the process or phenomenon by one number. The commonly applied method of unweighted geometrical mean (r_g) takes into consideration only the initial and final terms of the chronological sequence. The "middle" terms have no influence on the numerical values obtained from the r_g method. Therefore ways are proposed to counteract this immanent disadvantage of the r_g method. The solution are the proposals of the author formulating the methods: a) taking into consideration the sum of all the terms of the chronological sequence $(\bar{r})$ or b) taking into consideration the products of all the terms of the chronological sequence $(\hat{r})$. The theory of the methods $\bar{r}$ and $\hat{r}$ was presented and compared with the method r_g proving that the common application of r_g and $\bar{r}$ or r_g and $\hat{r}$ creates additional possibilities of entering into the analysis of the uniformity of dynamic processes.