Modelowanie i prognozowanie zmienności przy użyciu modeli opartych o zakres wahań

Tomasz Skoczylas*

Abstract

This paper shows advantages of using price range in volatility modeling and forecasting. It is known that price range, defined as a difference between the logarithms of the highest and the lowest price of an asset, is a useful volatility approximation. In this paper three different range-based models are compared with commonly used residual-based GARCH model in terms of goodness of fit and forecasting accuracy. Each model is estimated on daily data covering six currency pairs quoted to PLN. Despite being equally simple as residual-based GARCH model, range-based models generally perform better. Forecasts generated by range-based models are more precise, moreover they seems to better capture volatility clustering phenomenon.

Słowa kluczowe: zakres wahań, zmienność, prognozowanie, GARCH, RGARCH, CARR.
JEL Code: C13, C22, C53.

* Wydział Nauk Ekonomicznych Uniwersytetu Warszawskiego

Wstęp

Dynamiczny rozwój rynków finansowych, oraz wiążące się z nim upowszechnienie obrotu instrumentami pochodnymi, na przestrzeni ostatnich kilku dekad, stanowią jedną z głównych przyczyn wzrostu popularności ekonometrii finansowej. Jednym z centralnych punktów zainteresowania ekonometrii finansowej jest modelowanie zmienności stóp zwrotu z aktywów finansowych. Powszechnie wiadomym jest, że finansowe szeregi czasowe wykazują pewne charakterystyczne własności takie jak: leptokurtyczność rozkładów stóp zwrotu, czy zjawisko grupowania się wariancji. Jedną z pierwszych, skutecznych prób uwzględnienia tychże właściwości w modelu ekonometrycznym podjął Engle (1982). Zaproponowany przez niego model autoregresywnej warunkowej heteroskedastyczności, następnie rozwinięty przez Bollersleva (1986), dał początek szerokiej klasie modeli określanych skrótem GARCH. W podobnym czasie rozwinęła się koncepcja modeli stochastycznej zmienności (SV), zapoczątkowana w pracy Taylora (1986).

Cechą wspólną modeli z obu wymienionych klas jest modelowanie zmienności przy użyciu kwadratów stóp zwrotu w ustalonych przedziałach czasowych (najczęściej są to dzienne stopy zwrotu). Podejście takie całkowicie pomija ścieżkę zmian cen danego aktywa wewnątrz przyjętego przedziału czasowego. Opisany problem można rozwiązać estymując model na danych wysokiej częstotliwości, jednakże tego typu dane są kosztowne i w przypadku niektórych aktywów trudno dostępne. Praktyka rynkowa wskazuje jednak, iż istnieją sposoby, przynajmniej częściowego, uwzględnienia zmienności *„intraday”* cen aktywa, bazujące jedynie na powszechnie dostępnych danych dziennych. Wystarczy tu wskazać jedną z najpopularniejszych metod analizy technicznej: tworzenie wykresów świecowych, które oprócz cen otwarcia i zamknięcia zawierają również informację o najwyższym i najniższym kursie.

Wykorzystując intuicyjną zależność pomiędzy zakresem wahań (definiowanym, jako różnica między wartością logarytmu maksymalnej i minimalnej ceny tegoż aktywa w określonym przedziale czasowym), a zmiennością, badacze, począwszy od Parkinsona (1980), zaproponowali szereg estymatorów wariancji opartych o tę miarę. To zaś z kolei stanowiło impuls, by zająć się modelowaniem zmienności z wykorzystaniem zakresu wahań. Zakres wahań wykazuje wiele pożytecznych, z punktu widzenia modelowania ekonometrycznego, własności. Po pierwsze cechuje się wyższą persystencją niż kwadraty stóp zwrotu – wartości funkcji autokorelacji są często nawet kilkukrotnie wyższe dla zakresu wahań, w stosunku do kwadratów stóp zwrotu. Po drugie, empiryczne rozkłady zakresu wahań dają się dość dobrze przybliżyć rozkładem lognormalnym, co oznacza, że modelując logarytm zakresu wahań można korzystać z modeli zakładających normalność reszt. Wyżej wymienione własność spowodowały, iż na przestrzeni ostatnich kilkunastu lat pojawiło się wiele publikacji prezentujących różne podejścia do zagadnienia modelowania zmienności z wykorzystaniem zakresu wahań. Celem niniejszego artykułu jest zaprezentowanie czytelnikowi potencjalnych korzyści wynikających z zastosowania modeli opartych o zakres wahań, w stosunku do „tradycyjnego” podejścia. Znakomitym reprezentantem takiego „tradycyjnego” podejścia jest standardowy model GARCH (1,1), który stanowi w niniejszej pracy punkt odniesienia dla konkurencyjnych modeli wykorzystujących zakres wahań. Warto podkreślić, że w dotychczasowych badaniach empirycznych autorzy koncentrowali się na jednej z dwóch, opisanych w rozdziale drugim, grup modeli opartych na zakresie wahań, natomiast w niniejszej pracy zaprezentowane zostały wyniki dla modeli z obu tych grup. Wedle wiedzy autora jest to także pierwsze badanie wykorzystujące modele zmienności oparte o zakres wahań dla rynków walutowych krajów Europy Środkowo-Wschodniej.

W badaniu analizowane modele szacowane są dla sześciu par walutowych: EUR/PLN, USD/PLN, GBP/PLN, CHF/PLN, HUF/PLN i CZK/PLN. Cztery pierwsze to najczęściej handlowane, zarówno na rynku kasowym (spot) jak i terminowym, pary kwotowane do złotówki[1], dwie ostatnie zostały uwzględnione celem porównania (obrót na HUF/PLN i CZK/PLN jest zdecydowanie niższy niż na parach głównych). Wybór korony czeskiej i węgierskiego forinta można dodatkowo uzasadnić faktem, iż Czechy i Węgry są najważniejszymi partnerami handlowymi Polski wśród tzw. „nowych” państw członkowskich Unii Europejskiej.

Szacowanie wariancji w oparciu o zakres wahań

Koncepcję aproksymowania zmienności danej cechy różnicą pomiędzy jej najwyższą i najniższą obserwowaną wartością można spotkać już w podstawowych podręcznikach statystyki opisowej, gdzie różnica ta, określana jako rozstęp absolutny, jest wymieniana wśród pozycyjnych miar dyspersji. Jednakże dopiero Parkinson (1980) podjął się sformalizowania intuicyjnych zależności pomiędzy zakresem wahań danego aktywa, a wariancją jego stóp zwrotu. Przyjmując założenie, iż proces zmian logarytmów cen aktywa można opisać błądzeniem losowym bez dryfu, wykazał on, że nieobciążonym estymatorem wariancji jest:

$$\hat{\sigma}^2_{Park,t} = \frac{1}{4\ln 2}\left(\ln H_t - \ln L_t\right)^2 \tag{1}$$

gdzie:

H_t oznacza maksymalny kurs danego aktywa w przedziale czasowym t,

L_t oznacza minimalny kurs danego aktywa w przedziale czasowym t.

[1] Dane za NBP: raport „Obroty na rynku walutowym i rynku pozagiełdowych instrumentów pochodnych w Polsce” za 2010 rok. Źródło: http://www.nbp.pl/home.aspx?f=/systemfinansowy/obroty.html

Parkinson wskazał, że względna efektywność takiego estymatora (zdefiniowana jako iloraz wariancji klasycznego estymatora skonstruowanego przy użyciu dziennych stóp zwrotu, oraz wariancji estymatora wykorzystującego zakres wahań) wynosi od 2.5 do nawet 5. Już w tym samym roku (1980) Garman i Klass zaproponowali estymator uwzględniający dodatkowo dane dotyczące najwyższego i najniższego kursu aktywa. Prace nad znalezieniem jeszcze bardziej efektywnych (względnie) estymatorów podejmowane przez kolejnych badaczy owocowały coraz bardziej rozbudowanymi formułami; wśród nich warto wymienić estymatory zaproponowane przez Rogersa i Satchella (1991), Kunimoto (1992), czy Yanga i Zhanga (2000). Omówienie powyższych estymatorów, wraz ze wzorami można znaleźć w opracowaniu Chou i in (2009). Obszerne porównanie własności wybranych estymatorów opartych o zakres wahań, w zestawieniu z innymi estymatorami wariancji, można znaleźć w pracy Ślepaczuka i Zakrzewskiego (2009), należy jednak odnotować, iż autorzy badają własności estymatorów wykorzystując dane o wysokiej częstotliwości („*intraday*"). W pracach empirycznych, z obszaru ekonometrycznego modelowania zmienności, najpowszechniej wykorzystywany jest jednak estymator Parkinsona. Decyduje o tym głównie fakt, iż odwołuje się on wyłącznie do zakresu wahań, zdefiniowanego jako różnica logarytmów kursu maksymalnego i minimalnego, co czyni go prostym w użyciu.

Wykorzystanie zakresu wahań przy modelowaniu i prognozowaniu zmienności jest stosunkowo nowym podejściem w ekonometrii finansowej, jednakże literatura podejmująca ten temat jest już dość obszerna. Modele pojawiające się w tychże pracach, z punktu widzenia metodologicznego, można podzielić na dwie grupy: modele, w których zmienną prognozowaną jest zakres wahań, oraz: modele, w których zmienną prognozowaną jest wariancja stóp zwrotu

W przypadku modeli z pierwszej grupy, wnioskowanie nt. zmienności odbywa się pośrednio: wpierw prognozowany jest zakres wahań, na tej podstawie, przy użyciu odpowiednich estymatorów bądź przekształceń, otrzymywane są prognozy wariancji. Wśród modeli z tej grupy znajdziemy m.in. rozmaite wersje modeli klasy ARMA (np.:Asai i Brugal (2012), czy Wang i Roberts (2004)). Bez wątpienia jednym z najciekawszych modeli opisujących dynamikę zakresu wahań jest model CARR (ang. „*Conditonal Autoregressive Range"*) zaproponowany przez Chou (2005). Podstawowa postać modelu CARR(p, q) wygląda następująco:

$$R_t = \lambda_t \varepsilon_t$$

$$\lambda_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i R_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \lambda_{t-j} \qquad (2)$$

O błędzie losowym ε_t zakłada się, że pochodzi z rozkładu określonego dla liczb nieujemnych, o średniej 1. Chou sugeruje przyjęcie rozkładu wykładniczego, ale możliwe jest także zastosowanie rozkładu gamma, bądź Weibulla. Model CARR w dużym stopniu przypomina model GARCH, z tym, że w pierwszym przypadku modelowana jest warunkowa średnia, zaś w drugim, warunkowa wariancja. Chou proponuje także rozmaite rozszerzenia modelu CARR, m.in. model CARR-X z dodatkowymi, egzogenicznymi zmiennymi objaśniającymi, czy asymetryczny model CARR, gdzie zakres wahań dzielony jest na zakres górny (powyżej poziomu otwarcia) i zakres dolny (poniżej poziomu otwarcia) – tu z kolei widoczne jest pewne podobieństwo do modelu GJR-GARCH. Bliźniaczy do modelu CARR model prezentuje w swojej pracy także Mapa (2003), jedyną różnicą w stosunku do modelu Chou jest zastąpienie zakresu wahań odchyleniem standardowym policzonym jako pierwiastek kwadratowy estymatora wariancji Parkinsona[2].

Modele wykorzystujące zakres wahań do bezpośredniego prognozowania wariancji stóp zwrotu są w przeważającej większość modyfikacjami znanych już modeli opartych o kwadraty stóp zwrotu. Podobnie zatem, można je podzielić na dwie klasy: modeli zmienności stochastycznej (SV) opartych o zakres wahań, oraz modeli z rodziny GARCH. Wspólną ich cechą jest to, że wykorzystują równocześnie informacje zawarte w szeregach czasowych zakresu wahań i dziennych stóp zwrotu co, teoretycznie, powinno stanowić ich przewagę nad modeli opartymi tylko o zakres wahań. Jako pierwsi model SV wykorzystujący logarytm zakresu wahań zaproponowali Alizadeh, Brandt i Diebold (2002). Autorzy w swej pracy zwrócili uwagę na bardzo pożyteczną własność logarytmu zakresu wahań – otóż daje się on dobrze przybliżyć rozkładem normalnym. Ta cecha znacznie ułatwia proces estymacji modelu (metodą quasi-MNW), a także korzystnie wpływa na jakość generowanych w modelu prognoz. Modele klasy GARCH wykorzystujące zakres wahań, różnią się od swoich odpowiedników opartych na kwadratach stóp zwrotu równaniem warunkowej wariancji. Koncepcja jest stosunkowo prosta: wystarczy zastąpić, w równaniu warunkowej wariancji, estymator oparty o stopę zwrotu, bardziej efektywnym estymatorem wariancji (lub jego arytmetycznym przekształceniem). Wśród modeli tego typu warto wskazać modele: REGARCH (ang. "*Range-based-EGARCH"*), zaprezentowany w pracy Brandta i Jonesa (2006), oraz GARCH-TR autorstwa Fiszedera (2005). Model REGARCH jest modyfikacją dobrze znanego modelu EGARCH (ang. *„Exponential GARCH"*, patrz: Nelson (1991)), zaś w modelu GARCH-TR zastąpiono, w równaniu warunkowej wariancji, kwadraty stopy zwrotu, przeskalowanym prawdziwym zakresem wahań (ang. *„True Range"*). Prawdziwy zakres wahań (TR) został, w pracy Fiszedera, zdefiniowany jako:

[2] W czysto matematycznym sensie jest to zakres wahań pomnożony przez określoną, dodatnią stałą.

$$TR_t = \max\{H_t - L_t, |C_{t-1} - L_t|, |H_t - C_{t-1}|\} \quad (3)$$

gdzie H_t i L_t to odpowiednio: najwyższy i najniższy kurs w okresie t, zaś $C_{t\text{-}1}$ to cena zamknięcia w okresie t-1. Bardzo eleganckim i przejrzystym w zapisie jest model RGARCH przedstawiony w pracy Molnara (2011). Autor wykorzystuje w nim estymator Parkinsona i formułuje następujące równanie warunkowej wariancji:

$$h_t = \omega + \alpha \hat{\sigma}^2_{Park,t-1} + \beta h_{t-1} \quad (4)$$

Powyższa specyfikacja modelu RGARCH wykorzystuje autoregresyjne własności kwadratu zakresu wahań (estymator Parkinsona to kwadrat zakresu wahań pomnożony przez określoną, dodatnią stałą), nie zaś samego zakresu wahań. Często okazuje się jednak, że nieliniowe przekształcenia zmiennych zaburzają tego typu własności i zmniejszają wartości funkcji autokorelacji (ACF) szeregów czasowych tychże zmiennych.

Tabela 1. Różnice pomiędzy wartościami funkcji ACF dla zakresu wahań i kwadratu zakresu wahań

LAG	EUR/PLN	USD/PLN	GBP/PLN	CHF/PLN	HUF/PLN	CZK/PLN
1	0,0792	0,0618	0,0470	0,2416	0,0919	0,0674
2	0,1062	0,0810	0,0685	0,2333	0,1392	0,1207
3	0,1158	0,0667	0,0771	0,2409	0,1062	0,1080
4	0,0992	0,0403	0,0695	0,2296	0,0829	0,0734
5	0,0778	0,0623	0,0248	0,2244	0,0582	0,0859
6	0,1062	0,0879	0,0649	0,2333	0,0966	0,1129

Źródło: Opracowania własne.

W przypadku niniejszego badania, dla wszystkich analizowanych par walutowych okazało się, że wartości funkcji autokorelacji dla zakresu wahań są wyższe niż dla kwadratu zakresu wahań. Ilustruje to tabela 1, w której kolumnach, dla poszczególnych par walutowych, przedstawione są różnice pomiędzy wartością funkcji autokorelacji zakresu wahań, a wartością funkcji autokorelacji dla kwadratu zakresu wahań. Należy zauważyć, że w przypadku każdej z par przynajmniej do 6 opóźnienia włącznie funkcja autokorelacji zakresu wahań przyjmuje wyższe wartości. Powyższa obserwacja uzasadnia wprowadzenie alternatywnej specyfikacji modelu RGARCH (w dalszej części tekstu oznaczanego jako RGARCH(sd)), w którym miejsce równania warunkowej wariancji zajmuje równanie warunkowego odchylenia standardowego. Model RGARCH(sd) można przedstawić w następujący sposób:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim N\left(0, sd_t^2\right) \tag{5}$$
$$sd_t = \omega + \alpha\sigma_{Park,t-1} + \beta\, sd_{t-1}$$

gdzie: r to logarytmiczna stopa zwrotu, σ_{Park} to odchylenie standardowe policzone jako pierwiastek kwadratowy estymatora wariancji Parkinsona (określonego wzorem (1)), sd to warunkowe odchylenie standardowe, zaś ε – błąd losowy pochodzący z rozkładu normalnego.

Wyniki badania

W niniejszej pracy porównywane są własności czterech, szerzej omówionych w poprzednim rozdziale, modeli zmienności:
- standardowego modelu GARCH (1,1) z rozkładem normalnym
- modelu CARR (1,1) z rozkładem wykładniczym
- modelu RGARCH (1,1) z warunkowym równaniem wariancji i rozkładem normalnym
- modelu RGARCH(sd) (1,1) z warunkowym równaniem odchylenia standardowego i rozkładem normalnym

Przy doborze modeli do porównania kierowano się przede wszystkim zasadą, iż modele konkurencyjne wobec modelu GARCH (1,1), nie powinny być istotnie bardziej rozbudowane czy skomplikowane. W przeciwnym bowiem razie, korzystniejsze rezultaty osiągane przez modele oparte o zakres wahań, mogłyby być skutkiem ich bardziej kompleksowej struktury, a nie zastosowania innej formy aproksymacji zmienności. Wybór modelu CARR i dwóch postaci modelu RGARCH, był o tyle naturalny, że ich wewnętrzna struktura bardzo przypomina standardowy model GARCH. Dzięki temu analizowane modele mają podobny stopień złożoności.

Wszystkie wymienione powyżej modele estymowane są Metodą Największej Wiarogodności na danych składających się z szeregów czasowych dziennych notowań sześciu par walutowych: EUR/PLN, USD/PLN, GBP/PLN, CHF/PLN, HUF/PLN i CZK/PLN. Dane zawierają kwotowania kursów otwarcia, zamknięcia, kursu najwyższego i najniższego z okresu od 3 października 2006 do 1 października 2012, i pochodzą z bazy danych serwisu internetowego stooq.pl[3]. Na podstawie pierwotnych wartości szeregów policzono dzienne, logarytmiczne stopy zwrotu, oraz dzienny zakres wahań zdefiniowany jako różnica logarytmów kursów najwyższego i najniższego. Wartości logarytmicznych stóp zwrotu i dzien-

[3] www.stooq.pl

nego zakresu wahań, dla wygody obliczeń, wyrażono w punktach procentowych[4]. Powyższe dane posłużyły do oszacowania parametrów poszczególnych modeli, wyniki estymacji zaprezentowane są w tabelach 2-5.

Tabela 2. Oszacowania parametrów modelu GARCH (1,1)

	Parametry modelu GARCH		
Para	**omega**	**alfa**	**beta**
EUR/PLN	0,0037	0,0793	0,9139
USD/PLN	0,0102	0,0683	0,9248
GBP/PLN	0,0064	0,0621	0,9308
CHF/PLN	0,0063	0,0765	0,9177
HUF/PLN	0,0048	0,0674	0,9179
CZK/PLN	0,0108	0,0950	0,8767

Źródło: Opracowania własne.

Tabela 3. Oszacowania parametrów modelu CARR (1,1)

	Parametry modelu CARR		
Para	**omega**	**alfa**	**beta**
EUR/PLN	0,0145	0,1989	0,7852
USD/PLN	0,0112	0,1415	0,8510
GBP/PLN	0,0125	0,1603	0,8299
CHF/PLN	0,0164	0,1813	0,8051
HUF/PLN	0,0112	0,1715	0,8161
CZK/PLN	0,0163	0,1659	0,8169

Źródło: Opracowania własne.

Tabela 4. Oszacowania parametrów modelu RGARCH (1,1)

	Parametry modelu RGARCH		
Para	**omega**	**alfa**	**beta**
EUR/PLN	0,0103	0,1603	0,8538
USD/PLN	0,0223	0,1496	0,8841
GBP/PLN	0,0345	0,1575	0,8436
CHF/PLN	0,0166	0,1467	0,8760
HUF/PLN	0,0461	0,2053	0,7134
CZK/PLN	0,0635	0,2493	0,6443

Źródło: Opracowania własne.

[4] Np. stopa zwrotu równa 1.2 oznacza wzrost kursu o 1.2%.

Tabela 5. Oszacowania parametrów modelu RGARCH(sd) (1,1)

	Parametry modelu RGARCH(sd)		
Para	**omega**	**alfa**	**beta**
EUR/PLN	0,0143	0,1784	0,8320
USD/PLN	0,0293	0,1652	0,8509
GBP/PLN	0,0374	0,1665	0,8258
CHF/PLN	0,0150	0,1605	0,8571
HUF/PLN	0,0635	0,2369	0,6940
CZK/PLN	0,0711	0,2202	0,7013

Źródło: Opracowania własne.

Bez wątpienia, uwagę zwraca fakt, że oszacowania parametru alfa, odzwierciedlającego wpływ najnowszych informacji na warunkową wariancję, są zdecydowanie wyższe w przypadku modeli wykorzystujących zakres wahań. Oznacza to, że modele te reagują relatywnie szybciej na zmieniające się warunki rynkowe, ale może też prowadzić do generowania zawyżonych lub zaniżonych prognoz. Obserwacja ta zgodna jest z wnioskami zawartymi w pracy Molnara (2011), a także z empirycznie obserwowalnym faktem wyższej, niż w przypadku kwadratów stóp zwrotu, persystencji zakresu wahań. Warto także zauważyć, że w przypadku modeli RGARCH i RGARCH(sd) oszacowania parametru alfa wyraźnie dzielą analizowane pary walut na dwie grupy: w przypadku czterech głównych par walutowych oszacowania te przyjmują wartości ok. 0.15-0.17, natomiast dla par HUF/PLN i CZK/PLN parametr alfa wynosi już ponad 0.2.

Na podstawie uzyskanych oszacowań parametrów modeli wygenerowane zostały prognozy warunkowych wariancji. W przypadku modelu CARR uzyskano prognozy warunkowego zakresu wahań, dopiero na ich podstawie policzono, przy zastosowaniu estymatora Parkinsona, prognozy warunkowej wariancji. Oceny prognoz można dokonać stosując klasyczne miary jakości prognoz takie jak: średni błąd kwadratowy (MSE), średni błąd absolutny (MAE), średni względny błąd prognozy (MAPE), bądź skorygowany średni względny błąd prognozy (AMAPE). Często dokonuje się także regresji zmiennej prognozowanej na uzyskanych prognozach i analizuje konkurencyjne modele pod względem wielkości współczynnika determinacji R^2. W zamieszczonych poniżej tabelach znajdują się zestawienia wyżej wymienionych miar dla prognoz uzyskanych w rozpatrywanych modelach. W niniejszej pracy, otrzymane prognozy porównywane są z dwoma rodzajami empirycznych wartości zaobserwowanej zmienności. Pierwszą z nich jest kwadrat dziennych, logarytmicznych stóp zwrotu, drugą zaś wartości estymatora Parkinsona policzonego przy użyciu dziennego kursu maksymalnego i minimalnego zgodnie ze wzorem (1). Ze względu na fakt, iż kwadrat logarytmicznej stopy zwrotu w pewnych przypadkach przyjmuje wartość 0, w badaniu zrezygnowano z porównywania modeli pod kątem średniego względnego błędu prognozy (MAPE). Przyjrzyjmy się wpierw tabeli 6, która zawiera wartości błędów średniokwadratowego i średniego, absolutnego, policzonych przy uwzględnieniu kwadratów stóp zwrotu jako wartości empirycznych zaobserwowanej zmienności.

Tabela 6. Wartości statystyk MSE i MAE policzonych przy użyciu kwadratów stóp zwrotu

	MSE				MAE			
Para	**GARCH**	**CARR**	**RGARCH**	**RGARCH (sd)**	**GARCH**	**CARR**	**RGARCH**	**RGARCH(sd)**
EUR/PLN	1,3269	**1,3181**	1,3407	1,3312	0,5329	**0,4873**	0,5367	0,5336
USD/PLN	6,9429	7,0611	6,8897	**6,8552**	1,3504	**1,1998**	1,3475	1,3399
GBP/PLN	2,0515	2,0020	2,0153	**1,9968**	0,8000	**0,7233**	0,7854	0,7782
CHF/PLN	6,4195	6,4082	6,4647	**6,3787**	1,0283	**0,8996**	1,0271	1,0131
HUF/PLN	0,9744	0,9465	**0,9290**	0,9400	0,3783	0,3767	0,3722	**0,3713**
CZK/PLN	1,3005	**1,2559**	1,2481	1,2480	0,4194	0,4162	0,4093	**0,4031**

Źródło: Opracowania własne.

Pogrubioną czcionką zaznaczone są najniższe wartości MSE i MAE dla poszczególnych par walutowych. Jak widać, modele oparte o zakres wahań generalnie przyjmują niższe wartości błędów średniokwadratowego i średniego absolutnego, niż model GARCH. Podobne wnioski można wyciągnąć analizując tabelę 7, zawierającą wartości statystyk MSE i MAE policzonych z wykorzystaniem estymatora Parkinsona do wyznaczenia wartości empirycznych zaobserwowanej zmienności. W tym przypadku zdecydowanie najlepiej radzi sobie model CARR. Nie powinno to jednak szczególnie dziwić: estymator Parkinsona oparty jest wyłącznie na dziennym zakresie wahań – zmiennej modelowanej w modelu CARR.

Tabela 7. Wartości statystyk MSE i MAE policzonych przy użyciu estymatora Parkinsona

	MSE				MAE			
Para	**GARCH**	**CARR**	**RGARCH**	**RGARCH(sd)**	**GARCH**	**CARR**	**RGARCH**	**RGARCH(sd)**
EUR/PLN	0,4603	**0,4326**	0,4513	0,4417	0,3172	**0,2701**	0,3140	0,3108
USD/PLN	1,3018	**1,1538**	1,4321	1,3490	0,7292	**0,5381**	0,7286	0,7139
GBP/PLN	0,7901	0,6353	0,6363	**0,6267**	0,4841	**0,3926**	0,4480	0,4429
CHF/PLN	2,3264	**2,1646**	2,3817	2,2542	0,6128	**0,4732**	0,6107	0,5922
HUF/PLN	0,2570	**0,2440**	0,2507	0,2574	0,2187	**0,2076**	0,2099	0,2103
CZK/PLN	0,3277	**0,2751**	0,2858	0,2975	0,2566	**0,2309**	0,2328	0,2315

Źródło: Opracowania własne.

Model CARR wykazuje swoja wyższość także w przypadku skorygowanego średniego względnego błędu prognozy. W tabeli 8 przedstawione są wartości statystyki AMAPE przy użyciu jako wartości zaobserwowanych odpowiednio: kwadratów logarytmicznych stóp zwrotu (oznaczone jako AMAPE (reszty)), oraz estymatora Parkinsona (odpowiednio: AMAPE (Parkinson)).

Tabela 8. Wartości statystyki AMAPE

	AMAPE (reszty)				AMAPE (Parkinson)			
Para	**GARCH**	**CARR**	**RGARCH**	**RGARCH(sd)**	**GARCH**	**CARR**	**RGARCH**	**RGARCH(sd)**
EUR/PLN	0,5589	**0,5407**	0,5539	0,5542	0,3369	**0,2832**	0,3240	0,3237
USD/PLN	0,5568	**0,5354**	0,5504	0,5510	0,3618	**0,2790**	0,3472	0,3475
GBP/PLN	0,5474	**0,5252**	0,5386	0,5380	0,3263	**0,2643**	0,3048	0,3045
CHF/PLN	0,5683	**0,5440**	0,5610	0,5598	0,3607	**0,2861**	0,3475	0,3465
HUF/PLN	0,5657	**0,5597**	0,5613	0,5624	0,2850	**0,2561**	0,2665	0,2661
CZK/PLN	0,5662	**0,5607**	0,5607	0,5634	0,2895	**0,2579**	0,2595	0,2608

Źródło: Opracowania własne.

Analizując statystyki błędów prognoz łatwo zauważyć, że model CARR wyraźnie dominuje w przypadku MAE i AMAPE, traci jednak swoją przewagę przy MSE. Z obserwacji tej można wyciągnąć wniosek, iż model CARR wykazuje lepsze własności prognostyczne w okresach niskiej i umiarkowanej wariancji, natomiast generuje relatywnie większe błędy dla wysokich wartości zaobserwowanej zmienności.

Należy stwierdzić, że modele oparte o zakres wahań generalnie lepiej wypadły pod względem zastosowanych miar błędów prognoz, niż, referencyjny w tym badaniu, model GARCH. Wniosek ten jest zbieżny z wynikami prezentowanymi w literaturze. Fiszeder (2005) porównuje model GARCH-TR z ponad dwudziestoma innymi modelami prognostycznymi dla zmienności (m. in. EGARCH, GARCH-t czy SV) pod kątem różnych miar trafności prognoz, należy przy tym podkreślić, że jest to jedyny w tym zbiorze model oparty o zakres wahań. Badanie przeprowadzone dla indeksu WIG20 i spółki PKN Orlen wyraźnie pokazuje, że model GARCH-TR jest jedną z metod generujących najbardziej trafne prognozy. Do podobnych wniosków dochodzi także Molnar (2011). W swojej pracy porównuje on ze sobą modele RGARCH (1,1) i GARCH (1,1) dla notowań 30 spółek indeksu *Dow Jones Industrial Average*, oraz dla 6 indeksów giełdowych (CAC40, DAX, Nikkei, FTSE100, DJI, oraz NASDAQ100) i stwierdza, że model oparty o zakres wahań konsekwentnie lepiej wypada od standardowego modelu GARCH pod względem jakości prognoz. Z kolei w badaniu Mapa (2003) modelowana jest zmienność pary walutowej USD/PHP (dolar amerykański do filipińskiego peso), przy użyciu rożnych specyfikacji modelu GARCH, oraz modelu analogicznego do modelu CARR. Mapa porównuje modele przy zastosowaniu różnych miar błędu prognozy (m.in MSE, oraz MAE) i, podobnie jak wcześniej wymienieni autorzy, stwierdza, iż model wykorzystujący zakres wahań wypada lepiej pod kątem przyjętych kryteriów oceny modeli.

Przyglądając się wynikom zaprezentowanym w tabelach 6, 7 i 8, łatwo dostrzec, że model RGARCH(sd) w większości przypadków wypada nieznacznie, ale jednak korzystniej niż RGARCH. Warto jednak zastanowić się czy różnice pomiędzy prognozami generowanymi przez te dwa modele są statystycznie istotne. W tym celu można posłużyć się testem Diebolda-Mariano. Zastosowana w niniejszym badaniu wersja testu DM zakłada kwadratową funkcję straty. Hipotezą zerową testu jest brak statystycznej istotności różnic prognoz, hipoteza alternatywna zakłada, że błędy prognoz w modelu RGARCH(sd) są istotnie niższe niż w modelu RGARCH. Podobnie jak wcześniej test jest przeprowadzony raz przy użyciu kwadratów reszt jako wartości empirycznych i drugi raz z wykorzystaniem estymatora Parkinsona. Wyniki testu znajdują się w tabeli 9. Przy założeniu jednostronnej wersji testu, wartość krytyczna na poziomie istotności 5% wynosi -1.6449, w tabeli pogrubioną czcionką zaznaczone niższe wartości, pozwalające odrzucić hipotezę zerową przy poziomie istotności 0.05. Okazuje się, że dla głównych par walutowych różnice w generowanych prognozach, na korzyść modelu RGARCH(sd), są statystycznie istotne.

Tabela 9. Wartości testu Diebolda-Mariano dla pary model: RGARCH(sd) vs RGARCH

Para	Kwadraty reszt	Estymator Parkinsona
EUR/PLN	**-1,6559**	**-2,2570**
USD/PLN	-1,0101	**-4,4872**
GBP/PLN	**-1,7705**	-1,3298
CHF/PLN	**-1,9137**	**-2,9204**
HUF/PLN	0,6943	1,9624
CZK/PLN	-0,0053	1,8101

Źródło: Opracowania własne.

W tabelach 10 i 11 zamieszczone są wartości współczynnika R^2 z regresji zmiennych prognozowanych (odpowiednio: kwadratów logarytmicznych stóp zwrotu i wartości estymatora Parkinsona) na uzyskanych z modeli prognozach wariancji warunkowych.

Tabela 10. Wartości współczynnika R^2 w regresji dziennych stóp zwrotu na prognozach wariancji

Para	GARCH	CARR	RGARCH	RGARCH(sd)
EUR/PLN	0,1852	0,1970	0,1964	**0,1973**
USD/PLN	0,1490	0,1619	0,1613	**0,1627**
GBP/PLN	0,1654	0,1933	0,1939	**0,1945**
CHF/PLN	0,1213	**0,1325**	0,1253	0,1316
HUF/PLN	0,1264	0,1514	**0,1708**	0,1648
CZK/PLN	0,0658	0,0972	0,1011	**0,1022**

Źródło: Opracowania własne.

Tabela 11. Wartości współczynnika R^2 w regresji wartości estymatora Parkinsona na prognozach wariancji

Para	GARCH	CARR	RGARCH	RGARCH(sd)
EUR/PLN	0,4520	**0,4939**	0,4807	0,4852
USD/PLN	0,4638	0,4755	0,4630	**0,4760**
GBP/PLN	0,3876	0,5135	0,5121	**0,5148**
CHF/PLN	0,2714	**0,3137**	0,2814	0,3047
HUF/PLN	0,4386	**0,4636**	0,4602	0,4624
CZK/PLN	0,3676	0,4693	0,4571	**0,4703**

Źródło: Opracowania własne.

Tym razem pogrubioną czcionką wyróżnione są najwyższe wartości. Po raz kolejny modele oparte na zakresie wahań wypadają korzystniej niż standardowy model GARCH, co także znajduje potwierdzenie we wnioskach zawartych w wyżej przytoczonych pozycjach literatury. Należy w tym miejscu podkreślić duże różnice w przyjmowanych wartościach w zależności od wyboru zmiennej traktowanej jako empiryczna realizacja zmienności: dla kwadratów dziennych stóp zwrotu wartości współczynnika R^2 nie przekraczają 20%, podczas gdy dla wartości policzonych z wykorzystaniem estymatora Parkinsona współczynnik ten rośnie nawet do ponad 50%. Co jednak ciekawe, nawet przy użyciu estymatora Parkinsona, model CARR nie dominuje już tak, jak miało to miejsce w przypadku statystyk MSE i MAE policzonych dla wartości uzyskanych przy pomocy tegoż estymatora.

Dobry model zmienności powinien objaśniać zjawisko grupowania się wariancji stóp zwrotu, co zazwyczaj sprawdza się testem na występowanie autokorelacji wśród kwadratów standaryzowanych reszt. Najpopularniejszym testem diagnostycznym tego typu jest test Ljunga-Boxa. W teście tym, przy pomocy statystyki Q (o rozkładzie Chi-kwadrat) weryfikowana jest hipoteza o braku autokorelacji wśród kwadratów reszt do określonego opóźnienia włącznie. W niniejszej pracy kwadraty standaryzowanych reszt są testowane pod kątem występowania autokorelacji do 6 opóźnienia włącznie. W tabeli 12 zamieszczone są wartości p-value testu Ljunga Boxa dla standaryzowanych reszt ze wszystkich analizowanych modeli i dla każdej z rozpatrywanych par walutowych. W przypadku każdego z analizowanych modeli, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o braku autokorelacji wśród kwadratów standaryzowanych reszt na poziomie istotności 5%. Jednakże zwiększenie poziomu istotności do 10% spowodowałoby, że w przypadku modelu CARR dla pary walutowej HUF/PLN należałoby hipotezę zerową odrzucić.

Tabela 12. Wartości p-value testu Ljunga-Boxa na występowanie autokorelacji wśród kwadratów standaryzowanych reszt

Para	GARCH	CARR	RGARCH	RGARCH(sd)
EUR/PLN	0,2317	0,6040	0,6309	0,6435
USD/PLN	0,2893	0,6061	0,4917	0,5113
GBP/PLN	0,1646	0,7579	0,7718	0,7612
CHF/PLN	0,1198	0,7390	0,5029	0,5212
HUF/PLN	0,2061	**0,0721**	0,2866	0,2471
CZK/PLN	0,5785	0,1205	0,4407	0,2538

Źródło: Opracowania własne.

Analizując wyniki z tabeli 12 można stwierdzić, że modele oparte o zakres wahań lepiej uchwyciły zjawisko grupowania wariancji niż standardowy model GARCH. Warto jednak zauważyć, że o ile dla modeli RGARCH i RGARCH(sd) wartości p-value testu Ljunga-Boxa są wysokie i dość stabilne (w żadnym przypadku p-value nie spada poniżej poziomu 0.2), o tyle w przypadku modelu CARR można podzielić próbę na dwie grupy: waluty główne – dla których wartości p-value są wysokie, oraz pary HUF/PLN i CZK/PLN – gdzie p-value są znacząco niższe.

Podsumowanie

W powyższej pracy dokonano porównania trzech modeli opartych o zakres wahań (CARR, RGARCH i RGARCH(sd)) z referencyjnym modelem GARCH. Wykorzystane dane obejmowały kwotowania sześciu par walutowych: EUR/PLN, USD/PLN, CHF/PLN, GBP/PLN, HUF/PLN i CZK/PLN w okresie od 3 października 2006 do 1 października 2012. Celowość wykorzystania zakresu wahań, zdefiniowanego jako różnica logarytmów kursów maksymalnego i minimalnego, jako aproksymacji zmienności jest dobrze udokumentowana w literaturze, począwszy od estymatorów wariancji (m.in. Parkinson (1980), Garman i Klass (1980)), poprzez modele zmienności stóp zwrotu oparte o zakres wahań (m.in. Brandt i Jones (2006), Fiszeder (2005)), aż po modele opisujące dynamikę zakresu wahań, na podstawie których można konstruować prognozy zmienności (Chou (2005)). W zdecydowanej większość publikacji dotyczących prognozowania zmienności stóp zwrotu przy użyciu modeli opartych o zakres wahań autorzy podkreślają, że uwzględnienie tych dodatkowych informacji o zmienności cen aktywa, które zawiera w sobie zakres wahań, istotnie poprawia trafność generowanych prognoz.

Wyniki niniejszego badania wyraźnie potwierdzają rezultaty dotychczasowych prac. Dla analizowanych w tym artykule szeregów czasowych modele oparte o zakres wahań wykazały zdecydowanie lepsze dopasowanie do danych empirycznych niż model GARCH(1,1), pomimo niemal identycznego stopnia złożoności i bardzo podobnej wewnętrznej struktury. Nie ulega zatem wątpliwości, iż poprawa jakości generowanych prognoz wynika właśnie z użycia zakresu wahań jako aproksymacji zmienności. Oczywiście nie należy wyciągać z powyższych obserwacji nazbyt ogólnych wniosków. Warto pamiętać, iż niniejsze badanie przeprowadzone zostało dla specyficznego rynku, jakim jest rynek walutowy, gdzie wielkość obrotu zapewnia pełną płynność. Kwestia płynności z pewnością nie jest bez znaczenia, co zresztą widać po wynikach powyższego badania, w którym kilkukrotnie można było zauważyć tworzenie się dwóch grup: pierwszej, która obejmowała waluty główne, oraz drugiej, w której skład wchodziły pary HUF/PLN i CZK/PLN. Dla czterech, najbardziej płynnych par walutowych najlepsze wyniki osiągał model CARR, jednak w przypadku węgierskiego forinta i czeskiej korony nie było to już tak oczywiste. Godnym odnotowania jest także fakt, iż zaproponowany w tej pracy model RGARCH z równaniem warunkowego odchylenia standardowego (oznaczany jako RGARCH(sd)), generalnie okazał się lepszy niż jego odpowiednik wykorzystujący równanie warunkowej wariancji. Różnice pomiędzy obydwoma były co prawda niewielkie, ale systematycznie na korzyść modelu RGARCH(sd).

Z całą pewnością empiryczne własności zakresu wahań, jak również obiecujące wyniki modelowania zmienności przy jego użyciu zachęcają do dalszych badań nad tą metodą modelowania i prognozowania zmienności. W szczególności potrzebne są kolejne badania dla innych klas aktywów, na różnych, także mniej płynnych, rynkach. Kolejną ważną kwestią jest odpowiedź na pytanie czy modele oparte o zakres wahań ściśle dominują nad modelami wykorzystującymi kwadraty stóp zwrotu. Zdecydowana większość stosowanych miar błędów prognoz pokazuje uśrednione wartości, których porównanie przemawia na korzyść modeli opartych o zakres wahań. Nie jest jednak wykluczone, że na przestrzeni całej próby można wskazać okresy, w których zaobserwujemy odwrotną zależność. Być może warto zatem podjąć próbę zbudowania modeli hybrydowych, bądź zaproponowania takich algorytmów konstruowania prognozy, które uwzględniałyby oba podejścia w modelowaniu zmienności.

Bibliografia

Alizadeh S., Brandt M., Diebold F. (2002) Range-based estimation of stochastic volatility models, Journal of Finance 57, s. 1047-1091.

Asai M., Brugal I. (2012) Forecasting volatility using range data: analysis for emerging equity markets in Latin America, Applied Financial Economics 22, s. 461-470.

Bollerslev T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedascity, Journal of Econometrics 31, s. 307-327.

Brandt M., Jones C. (2006) Volatility forecasting with range-based EGARCH model, Journal of Business and Economic Statistics 24, s. 470-486.

Chou R. (2005) Forecasting financial volatilities with extreme values: the conditional autoregressive range (CARR) model, Journal of Money Credit and Banking 37, s. 561-582.

Chou R. (2006) Modeling the Asymmetry of Stock Movements Using Price Ranges, Advances in Econometrics 20A, s. 231-257.

Chou R., Chou H., Liu N. (2009) Range Volatility Models and Their Applications in Finance, [w:] The Handbook of Quantitative Finance and Risk Management, Springer.

Engle R. (1982) Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, Econometrica 50, s. 987-1007.

Fiszeder P. (2005) Forecasting the Volatility of the Polish Stock Index – WIG20, [w:] Forecasting Financial Markets. Theory and Applications, Uniwersytet Łódzki, Łódź.

Fiszeder P. (2009) Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń.

Garman M., Klass M. (1980) On the estimation of security price volatilities from historical data, Journal of Business 53, s. 67-78.

Kunimoto N. (1992) Improving the Parkinson method of estimating security price volatilities, Journal of Business 65, s. 295-302.

Li H., Hong Y. (2011) Financial volatility forecasting with range-based autoregressive volatility model, Finance Research Letters 8, s. 69-76.

Mapa D. (2003) A Range-Based GARCH Model for Forecasting Volatility, The Philippine Review of Economics, Vol. XL, No.2, s 73-90.

Molnar P. (2011) High-low range in GARCH models of stock return volatility, EFMA Annual Meetings, Barcelona.

Nelson D. (1991) Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach, Econometrica 59, s. 347-370.

Parkinson M. (1980) The extreme value method for estimating the variance of the rate of return, Journal of Business 53, s. 61-65.

Rogers L., Satchell S. (1991) Estimating variance from high, low and closing prices, Annals of Applied Probability 1, s. 504-512.

Ślepaczuk R., Zakrzewski G. (2009) High-Frequency and Model-Free Volatility Estimators, working paper, Wydział Nauk Ekonomicznych UW.

Taylor S. (1986) Modeling Financial Time Series, Wiley, Chichester.

Yang D., Zhang Q. (2000) Drift-independent volatility estimation based on high, low, open and closing prices, Journal of Business 73, s. 477-491.

Wang Y., Roberts C. (2004) Forecasting Daily Volatility Using Range-Based Data, American Agricultural Economics Association Annual Meeting, Denver.