

Charakterystyki fluktuacji finansowych

Rafał Rak, dr, Instytut Fizyki, Uniwersytet Rzeszowski
Stanisław Drożdż, prof. dr hab., Instytut Fizyki, Uniwersytet Rzeszowski / IFJ PAN Kraków
Paweł Oświęcimka, dr, IFJ PAN Kraków

Wstęp

Fizyka, ekonomia i matematyka to dziedziny nauki, które w wyniku połączenia zaowocowały powstaniem interdyscyplinarnej w ostatnich latach prężnie rozwijającej się dyscypliny naukowej zwanej *ekonofizyką*. Jest to dziedzina, która wykorzystuje wielkie doświadczenie i narzędzia fizyki dla potrzeb wyjaśniania i modelowania szeroko rozumianych zjawisk ekonomicznych. Rynki finansowe oferują niezwykle bogatą bazę danych i generują wiele interesujących zjawisk, które obecnie stanowią wielkie wyzwanie także dla fizyków. Świat finansów, będący jednym z najbardziej złożonych, samoorganizujących się systemów, stawia wiele interesujących pytań, na które fizyka w ostatnich latach stara się odpowiedzieć. Należy jednak pamiętać, że związek między fizyką a ekonomią zaczął się o wiele wcześniej. Pierwsze prace naukowe pojawiły się już na przełomie XIX i XX wieku, kiedy to L. Bachelier [1900] w 1900 roku zaproponował pierwszy model dynamiki cen akcji, który — jak się później okazało — był analogiczny do modelu opisującego stochastyczny ruch cząstki Browna, czyli tzw. klasyczny ruch Browna lub ruch Wienera-Browna. I choć dziś wiemy, że model ten nie opisuje w pełni dynamiki rynku giełdowego, to jednak stanowił on duży wkład do powstania i rozwoju matematyki finansowej i ekonofizyki. Niedoskonałością modelu opartego na błędzeniu przypadkowym okazało się założenie, że rozkłady prawdopodobieństwa fluktuacji cen akcji podlegają rozkładowi Gaussa. Dziś wiemy, że empiryczne rozkłady mają często znacznie grubsze ogony, które dla relatywnie dużych zdarzeń spełniają prawa potęgowe [Drożdż i in., 2003; Mantegna, Stanley, 1995; Gopikrishnan i in., 1999, Plerou i in., 1999; Gopikrishnan i in., 1998].

Koncepcję rozkładów potęgowych zapoczątkował włoski ekonomista i socjolog V. Pareto, który zaproponował je do statystycznego opisu zjawisk socjologicznych [Pareto, 1897]. Kolejne lata pokazały jednak ich zastosowanie w ekonomii — potęgowe rozkłady Levy’ego [1925] oraz ich aplikowanie do rzeczywistych fluktuacji finansowych przez B. Mandelbrota [1963]. Wiadomo jednak, że rozkłady Levy’ego również nie do końca odzwierciedlają naturę

rynków finansowych, dla których współczynnik skalujący ogony ich rozkładów leży poza stabilnym obszarem Levy’ego. Skoro ani rozkład Gaussa, ani rozkłady Levy’ego nie pasują do rzeczywistych rozkładów stóp zwrotu pojawia się pytanie, czy istnieją rozkłady, które zadowalająco opisywałyby fluktuacje finansowe? Użyteczna okazuje się tu teoria nieekstensywnej mechaniki statystycznej, która w sposób naturalny prowadzi do nowej klasy rozkładów zwanych q-Gaussianami [Tsallis, 1988; Tsallis i in., 1998; Tsallis i in., 2003; Osorio i in., 2004].

1. Od ruchów Browna do fluktuacji finansowych

W 1827 roku brytyjski biolog Robert Brown obserwując przez mikroskop pyłki kwiatowe w zawieszynie wodnej, dostrzegł, iż znajdują się one w nieustannym, chaotycznym ruchu. Niemal 80 lat później A. Einstein [1905] i M. Smoluchowski [1906] dokonali niezależnie matematycznego opisu tego typu zjawiska.

Jednak wcześniej, bo 1900 roku, Louis Bachelier w swojej pracy doktorskiej z matematyki pt. *Teoria spekulacji*, zaproponował pewien teoretyczny model procesu stochastycznego mający opisywać zachowanie fluktuacji akcji na giełdzie paryskiej [Bachelier, 1900]. Po sześćdziesięciu latach odkryto na nowo jego pracę i okazało się, że równania, które przedstawił opisywały ruchy Browna.

W kolejnych latach zaproponowano bardziej ogólną postać tego ruchu, tzw. *ułamkowy ruch Browna* (ang. FBM) lub inaczej *ułamkowy szum gaussowski* [Muzy i in., 1994]. Procesy tego typu — oznaczmy je $B_H(t)$ — są procesami gaussowskimi o zadanym parametrze $H \in (0, 1)$, wartości średniej równej zero oraz kowariancji

$$\text{Cov}(B_H(t_1); B_H(t_2)) = \frac{\sigma^2}{2} \left(t_1^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H} + t_2^{2H} \right) \quad (1)$$

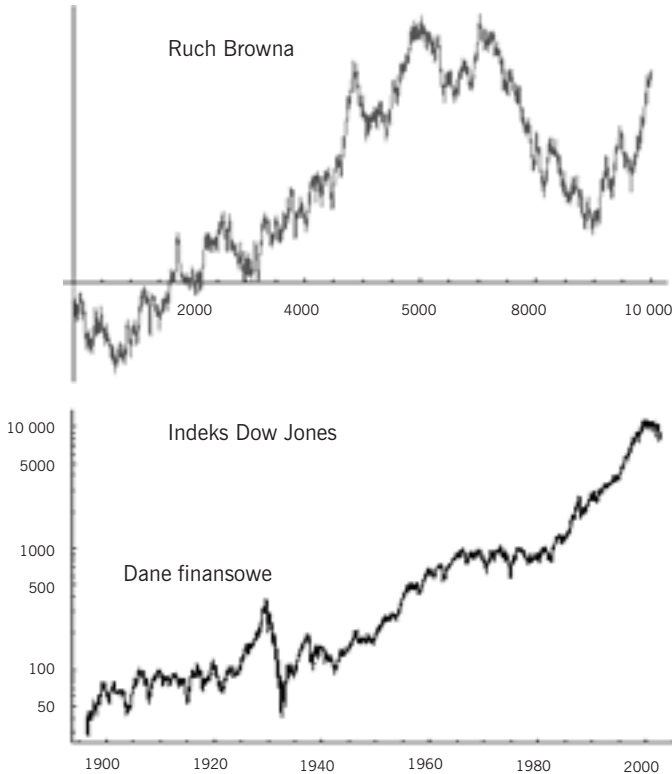
Parametr H nazywany *wykładnikiem Hursta* [Hurst, 1951] wprowadza duże uogólnienie do procesu Browna. Można wyróżnić tu następujące charakterystyczne przedziały H :

- gdy $H \in (0,5, 1)$, to szereg czasowy odznacza się dodatnią persystencją (korelacją),
- gdy $H \in (0, 0,5)$, to szereg czasowy odznacza się ujemną persystencją, (antypersystencją — antykorelacją)
- szczególnym przypadkiem tego uogólnionego ruchu jest ruch bez jakichkolwiek korelacji, tzw. *klasyczny ruch Browna* (nazywany również ruchem Browna-Wienera) — występuje on gdy $H = 0,5$.

Na rysunku 1. zestawiono ruch Browna z rzeczywistymi danymi finansowymi.

Patrząc na poniższy rysunek, widzimy, że wykresy jakościowo są do siebie bardzo podobne. Ale gdy popatrzymy na wartości skoków ruchów Browna (różnice pomiędzy dwoma kolejnymi ruchami) i zestawimy je z fluktuacjami

stóp zwrotu danych rzeczywistych zauważymy znaczące różnice. Widzimy, że w serii danych finansowych stosunkowo często pojawiają się wartości większe od 5, a czasem i znacznie większe. W ruchu Browna tak duże skoki są praktycznie niemożliwe.



Rys. 1.

Zestawienie ruchu Browna (panel górny) z danymi indeksu Dow Jones (panel dolny)

Z perspektywy dynamiki finansów proces stochastyczny opisany powyżej (wzór (1)) ma między innymi jedno zasadnicze uproszczenie — zakłada gausowskie rozkłady prawdopodobieństwa, co generalnie nie jest zgodne z rzeczywistymi obserwacjami. Dlatego w kolejnych latach podejmowano próby zastąpienia ruchu Browna — prowadzącego do rozkładu normalnego — alternatywnymi procesami stabilnymi, które dla różnych instrumentów finansowych lepiej odzwierciedlały rozkłady logarytmicznych stóp zwrotu.

W 1963 roku Mandelbrot po wnikliwej analizie cen akcji bawełny zauważył, że empiryczne rozkłady dają dużo grubsze ogony niż rozkład Gaussa [Mandelbrot, 1963]. Oznaczało to, że bardzo rzadkie zdarzenia z punktu widzenia rozkładu normalnego, występują z dużo większym prawdopodobieństwem w rzeczywistych obserwacjach. Dlatego zaproponował on zastosowanie tzw. α -stabilnych rozkładów Levy'ego.

**Rys. 2.**

Wartości „skoków” dla ruchów Browna (panel górny) i danych rzeczywistych (panel dolny)

Proces stochastyczny $L(t)$ nazywamy α -stabilnym ruchem Levy'ego (lotem Levy'ego) jeżeli przyrosty $L(\Delta t) = L(t) - L(\varphi)$ dla $0 \leq \varphi < t$ są niezależne, a ich rozkład gęstości prawdopodobieństwa jest α -stabilnym rozkładem Levy'ego:

$$L(x; (t - \varphi)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(t-\varphi)|k|^\alpha} \cos(kx) dk$$

gdzie $\alpha \in (0, 2]$ jest parametrem stabilności i decyduje o grubości ogonów rozkładu. Stosując następujące rozwinięcie asymptotyczne:

$$L(x; (t - \varphi)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n!} \frac{(t - \varphi)^n}{x^{1+n\alpha}} \Gamma(1 + n\alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha n}{2}\right)$$

dostrzegamy, że pierwszy i wiodący człon tego rozwinięcia dla $x \gg 1$ ma postać:

$$L(x) \sim x^{-(1 + \alpha)}$$

Rozkład Levy'ego jest na tyle ogólnym rozkładem, że może przyjmować postać rozkładu Gaussa (dla $\alpha = 2$), rozkładu Cauchy'ego (dla $\alpha = 1$) oraz inne, pośrednie zależnie od parametru α .

Z powyższych własności rozkładu Levy'ego wnioskujemy, że rozkład ten nie może odzwierciedlać rozkładów fluktuacji finansowych. Dla rzeczywistych danych (zostanie to pokazane w kolejnym rozdziale) skalowanie ogonów z $\alpha = 3$ jest już w obszarze zabronionym dla rozkładu Levy'ego.

2. Rozkłady prawdopodobieństw stóp zwrotu

Własności statystyczne fluktuacji finansowych na różnych skalach czasowych odgrywają jedną z najważniejszych ról w modelowaniu rynków finansowych

wych, a ich skwantyfikowane własności są jednym z najciekawszych zagadnień fizyki i ekonomii.

Rozpatrzmy szereg czasowy $W(t)$ reprezentujący wartość indeksu lub spółki w czasie t . R zdefiniowane przez następującą formułę:

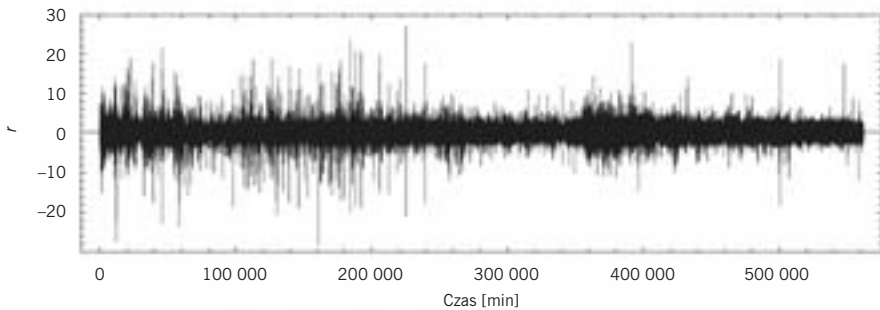
$$R \equiv R(t, \Delta t) = \ln W(t + \Delta t) - \ln W(t)$$

nazywane jest logarytmiczną stopą zwrotu (ang. *return*). W kolejnym kroku normalizujemy stopy zwrotu:

$$r \equiv r(t, \Delta t) = \frac{R - \langle R \rangle_T}{\nu}$$

gdzie $\nu \equiv \nu(\Delta t)$ jest odchyleniem standardowym stóp zwrotu w czasie T , $\nu^2 = \langle R^2 \rangle_T - \langle R \rangle_T^2$ i $\langle \dots \rangle_T$ jest średnią po T .

Na rysunku 3. pokazano znormalizowane stopy zwrotu r dla $\Delta t = 1$ min.



Rys. 3.

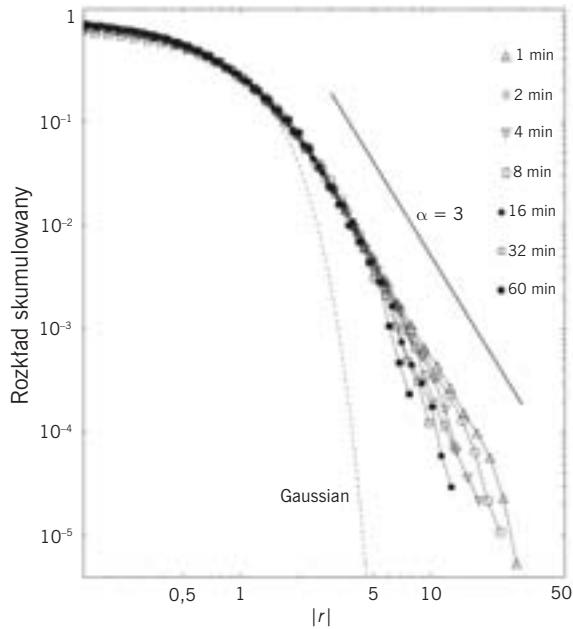
Fluktuacje znormalizowanych, jednominutowych stóp zwrotu indeksu WIG20 od 04.01.1999 do 31.10.2005

Jak zmienia się charakter rozkładów stóp zwrotu indeksu WIG20, podczas gdy zwiększamy parametr Δt , pokazano na rysunku 4. Przedstawiono na nim rozkłady modułów, analizowane tu fluktuacje są bowiem z dobrym przybliżeniem symetryczne. Wykresy przedstawione są w skali log-log, ponieważ wtedy możemy bardzo wyraźnie widzieć zachowanie się ogonów rozkładów, a zwłaszcza zidentyfikować rzadkie zdarzenia, które mają istotny wpływ na dynamikę fluktuacji stóp zwrotu.

W szczególności obserwujemy potęgowe skalowanie się tzw. ogonów rozkładów

$$P(r > x) \sim x^{-\alpha}$$

zgodne z odwrotnym prawem kubicznym, dla którego $\alpha = 3$.



Rys. 4.

Skumulowane rozkłady modułów znormalizowanych stóp zwrotu indeksu WIG20 notowanego w okresie od 04.01.1999 do 31.10.2005 dla różnych skal czasowych $\Delta t = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 60\}$

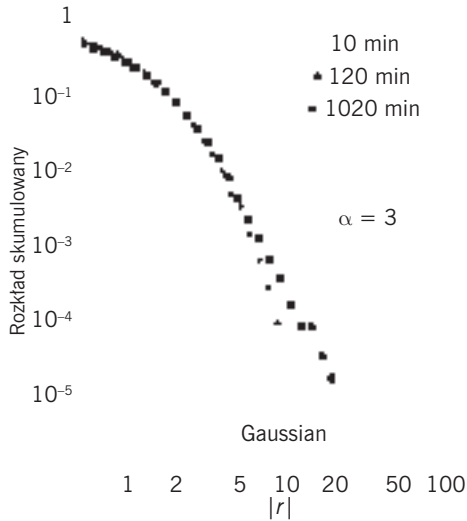
Na wykresie skale czasowe oznaczono symbolami graficznymi. Linia przerywana odpowiada skumulowanemu rozkładowi Gaussa.

Rozkłady, które spełniają to prawo, mają skończony drugi moment (w tym przypadku próbka ma skończoną długość), są więc rozkładami niestabilnymi w sensie Levy'ego. Choć charakter rozkładów zmienia się wraz ze wzrostem skali czasowej, to nawet dla 60 minut rozkład ciągle odległy jest od rozkładu Gaussa.

Rodzi się kolejne pytanie: o charakter rozkładu prawdopodobieństwa spółek tworzących dany indeks.

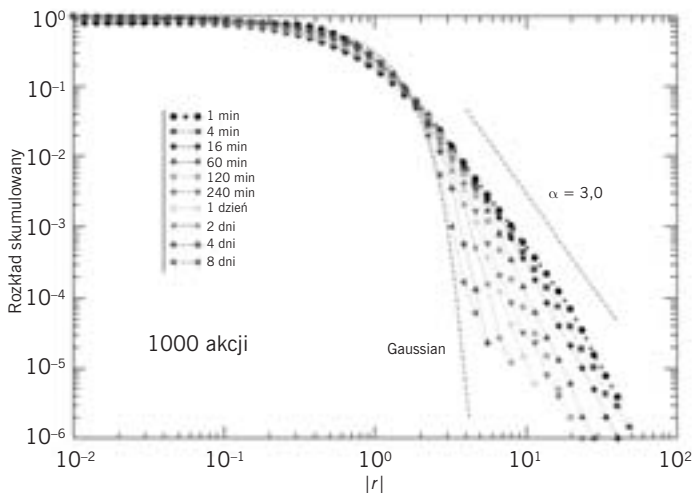
Łączny (średni) rozkład dla 29 spółek przedstawiono na rysunku 5. Pokazano na nim także rozkłady dla trzech skal czasowych 10, 120 i 1020 minut. Widać, że dla skali 10 minutowej (podobnie jak było to dla całego indeksu WIG20) spełnione jest w przybliżeniu odwrotne prawo kubiczne, tzn. ogony rozkładów podlegają skalowaniu z parametrem $\alpha = 3$.

Polski rynek powszechnie uważany jest za rynek wschodzący, choć definicja takiego rynku nie jest do końca sprecyzowana. Często za rynki wschodzące uważa się młode giełdy. Innym kryterium jest kapitalizacja. To jednak budzi pewne zastrzeżenia, bo np. na giełdzie indyjskiej, choć młodej i z tego punktu widzenia uznawanej za rynek wschodzący, kapitalizacja jest obecnie jedną z największych na świecie.



Rys. 5.

Łączne (średnie) skumulowane rozkłady modułów znormalizowanych logarytmicznych stóp zwrotu 29 największych firm notowanych od 17.11.2000 do 30.06.2005 dla trzech skal czasowych (10 min, 120 min i 1020 min) Linia przerywana reprezentuje rozkład Gaussa.



Rys. 6.

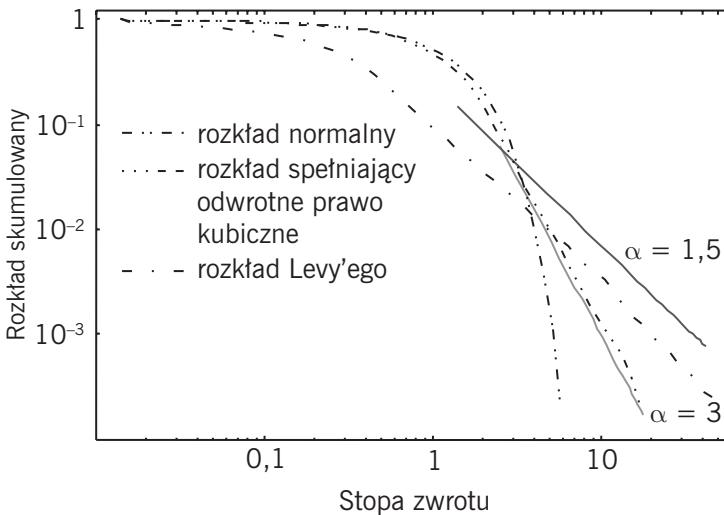
Skumulowane rozkłady modułów znormalizowanych stóp zwrotu dla 1000 spółek indeksów NYSE i NASDAQ notowanych w latach 1998–1999 Pokazano rozkłady dla różnych skal czasowych $\Delta t = \{1, 4, 16, 60, 120, 240 \text{ min}, 1, 2, 4, 8 \text{ dni}\}$.

Okazuje się jednak, że nasz rodzimy rynek posiada cechy obydwu tych rynków oraz inne, nietypowe dla żadnego z nich [Rak, 2008]. Jedną z cech typ-

wych także dla giełd ustanowionych są właśnie rozkłady prawdopodobieństwa stóp zwrotu. Na rysunku 6. przedstawiono rozkłady prawdopodobieństw dla 1000 największych spółek indeksu NASDAQ i NYSE. Wyniki te pokazują, że — podobnie jak dla polskiego rynku — ogony rozkładów dla najkrótszych skal czasowych spełniają odwrotne prawo kubiczne.

3. Niekstensywność fluktuacji finansowych

W poprzednim rozdziale pokazano, że rozkład prawdopodobieństwa znormalizowanych stóp zwrotu nie jest ani rozkładem Levy'ego ani rozkładem Gaussa. Poglądowe zestawienie tych rozkładów pokazano na rysunku 7.



Rys. 7.

Trzy typy skumulowanych rozkładów modułów znormalizowanych fluktuacji analogicznych do stóp zwrotu

Są one wynikiem symulacji numerycznych i reprezentują rozkład Levy'ego, rozkład normalny oraz rozkład reprezentujący odwrotne prawo kubiczne.

Grube ogony rozkładów rzeczywistych fluktuacji finansowych oraz ich złożony charakter leżący u podstaw szeroko rozumianych korelacji [Oświęcimka i in., 2005; Kwapien i in., 2005; Drożdż i in., 2003; Bartolozzi i in., 2005] sugerują, że konwencjonalne pojęcie ergodyczności może być nieodpowiednie do opisu i modelowania tego typu zjawisk.

W takim wypadku formalizm uogólnionej, nieekstensywnej mechaniki statystycznej może zaoferować bardziej odpowiednią strukturę. Obecnie najbardziej konsystentnym ujęciem zagadnienia nieekstensywności jest formalizm oparty na zapostulowanej w 1988 roku przez C. Tsallis'a uogólnionej entropii [Tsallis, 1988; Tsallis i in., 1998; Tsallis i in., 2003; Osorio i in., 2004], która dla zbioru N zdarzeń $\{x_i\}$ charakteryzowanych przez prawdopodobieństwa $\{p_i\}$ wyraża się wzorem:

$$S_q = \sum_{i=1}^N p_i^q \ln_q p_i$$

gdzie parametr q jest *parametrem nieekstensywności*, a \ln_q nazywany jest uogólnionym logarytmem lub *q-logarytmem*:

$$\ln_q x = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}$$

Entropia ta jest na tyle ogólna, że jeżeli przyjąć $q = 1$ to redukuje się ona do klasycznej entropii Boltzmana-Gibbsa.

Przy odpowiednich założeniach [Tsallis, Tsallis i in., 1988; Tsallis i in., 1998] ekstremalizacja uogólnionej entropii S_q w wersji uciąglonej prowadzi do nowej i bardzo ciekawej klasy rozkładów gęstości prawdopodobieństwa zwanych *q-Gaussianami*:

$$p_q(x) = N_q \left[1 + B_q(q-1)(x - \mu_q)^2 \right]^{\frac{1}{1-q}} \quad (q < 3)$$

Funkcję

$$e_q^x = \left[1 + (1-q)x \right]^{\frac{1}{1-q}}, \quad e_1^x \equiv e^x$$

nazywamy *q-eksponentą*. Funkcja ta jest odwrotna do wprowadzonego powyżej *q-logarytmu*. Biorąc pod uwagę, że dla $1 + (1-q)x \leq 0$, możemy gęstość prawdopodobieństwa dla *q-Gaussianów* zapisać jako:

$$p_q(x) = N_q e_q^{-B_q(x - \mu_q)^2}$$

Innym ważnym argumentem, który w świetle tych rozważań podnosi rangę rozkładu $p_q(x)$, jest jego asymptotyczne zachowanie przyjmujące dla $x \gg 1$ postać prawa potęgowego:

$$p_q(x) \sim x^{\frac{2}{1-q}}$$

W szczególności w odniesieniu do scałkowanych rozkładów $p_q(x)$ dla $q = 3/2$ asymptotycznie przyjmuje postać *odwrotnego prawa kubicznego*. Można wskazać również inne przedziały q , które jeszcze dobitniej podkreślają uogólnioną postać $p_q(x)$:

- dla $q = 1$ $p_q(x)$ przyjmuje własności rozkładu Gaussa,
- dla $q = \frac{\alpha + 3}{\alpha + 1}$ asymptotyka ogonów $p_q(x)$ pokrywa się z ogonami α -stabilnych rozkładów Levy'ego.

Pierwsze próby przydatności tej formy rozkładów do opisywania rozkładów prawdopodobieństwa finansowych szeregów czasowych okazały się całkiem obiecujące [Queiros i in., 2005]. Dlatego poniżej zostanie przedstawiona

próba opisanie rozkładów stóp zwrotu indeksów DAX, S&P500 i WIG20 (i jego portfela) przez rodzinę rozkładów $p_q(x)$.

Jednak dla uzyskania lepszej stabilności wyniku, zamiast gęstości prawdopodobieństwa $p_q(x)$ zostanie wprowadzona skumulowana postać tego rozkładu:

$$P_{q\pm}(x) = \mp \int_{\pm\infty}^x p_q(x) dx$$

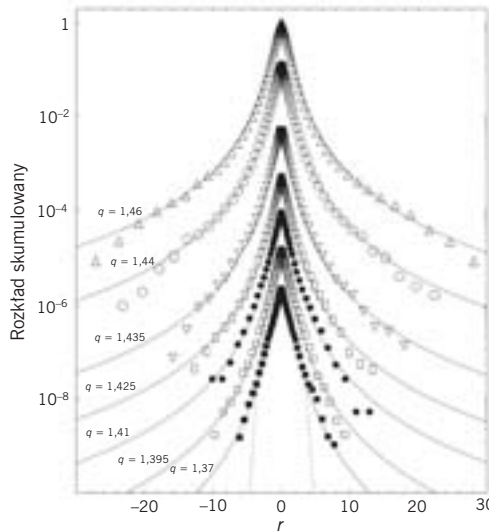
gdzie „+” i „-” oznaczają odpowiednio prawe i lewe skrzydło rozkładu.

Po scałkowaniu otrzymujemy [Rak i in., 2007]:

$$P_{q\pm} = N_q \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}(3-q)\right) \beta}{2\Gamma(\beta) \sqrt{\frac{B_q}{\beta}}} \pm (x - \mu_q) {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; \delta) \right) \quad (2)$$

gdzie $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{q-1}$, $\gamma = \frac{3}{2}$, $\delta = (q-1)(\mu_q - x)^2$, a ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; \delta)$ jest hipergeometryczną funkcją Gaussa, zdefiniowaną przez następujący szereg:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; \delta) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma} \delta + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} \delta^2 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\delta^k (\alpha)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k}$$



Rys. 8.

Skumulowane rozkłady znormalizowanych stóp zwrotu indeksu WIG20 notowanego w okresie od 04.01.1999 do 31.10.2005 dla różnych skal czasowych (od 1 do 60 minut)

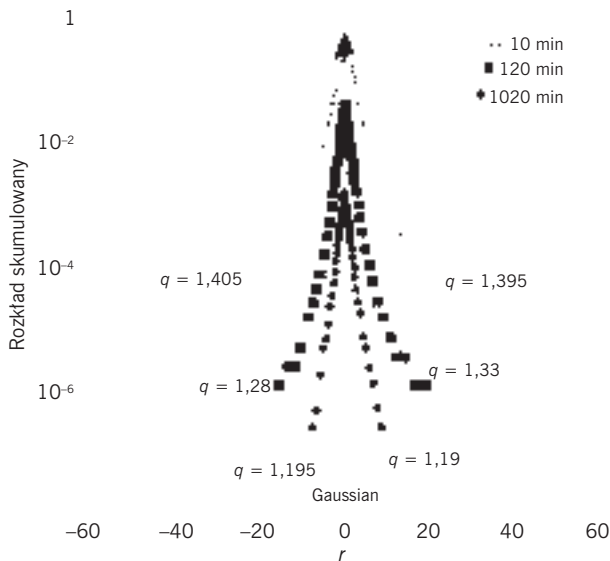
Linie ciągłe reprezentują najlepsze dopasowanie q -Gaussianów do danych empirycznych. Linia przerywana odpowiada rozkładowi Gaussa o wartości średniej 0 i wariancji 1. Pokazane rozkłady zostały przeskalowane po to, by lepiej móc je porównywać.

Rysunek 8. przedstawia prawą i lewą część skumulowanych rozkładów stóp zwrotu indeksu WIG20. Do danych empirycznych dopasowano teoretyczne rozkłady (wzór (2)) w zależności od q .

Rezultat wydaje się bardzo interesujący ze względu na duże pokrywanie się zachowań rzeczywistych z teorią. Co więcej, dla małych Δt otrzymany teoretyczny wynik jest bliski $q = 3/2$, co jest konsyistentne z odwrotnym prawem kubicznym.

Wraz z wydłużaniem się Δt teoretyczne (najlepiej dopasowane) wartości q systematycznie zmniejszają się, a odpowiadające im q -Gaussiany, stanowią w pełni satysfakcjonującą reprezentację dla całej klasy skal czasowych rozkładów prawdopodobieństwa stóp zwrotu.

Dlatego też zasadne jest pytanie o ich użyteczność na poziomie spółek. Na rysunku 9. przedstawiono uzyskane wyniki.



Rys. 9.

Łączne (średnie) skumulowane rozkłady znormalizowanych logarytmicznych stóp zwrotu 29 największych firm notowanych od 17.11.2000 do 30.06.2005 dla trzech skal czasowych (10 min, 120 min i 1020 min)

Linie ciągłe reprezentują najlepsze dopasowanie q -Gaussiów do empirycznych danych. Pokazane rozkłady zostały przeskalowane po to, by lepiej móc je porównywać.

Dla najkrótszej skali czasowej (10 min) parametr $q \approx 1,4$. Oznacza to, że ogon tego rozkładu skaluje się jak $p_q(r) \sim r^{\frac{2}{1-q}+1} \sim r^{-4}$. Wartość wykładnika przy r wskazuje na odchylenie od odwrotnego prawa kubicznego, które w przybliżeniu było spełnione dla indeksu WIG20. Należy jednak pamiętać,

że tu skala czasowa jest większa niż dla WIG20 (tam wynosiła 1 min), a analizowane dane nie są idealnym odzwierciedleniem całego indeksu. Na poziomie coraz wyższych skal czasowych dostrzegamy również, że rozkłady empirycznych fluktuacji systematycznie zmieniają się (parametr q maleje) i odchylają się w kierunku rozkładu normalnego.

4. Zakończenie

W pracy poddano analizie rozkłady fluktuacji stóp zwrotu indeksu WIG20, jego portfela, a także spółek indeksów NYSE i NASDAQ. Chociaż na świecie Polska Giełda Papierów Wartościowych często uznawana jest za rynek wschodzący, to jednak pokazane tu rozkłady prawdopodobieństw zachowują się bardzo podobnie jak dla ustanowionych rynków giełdowych. Bardzo ważnym wnioskiem jest to, że zaprezentowany tu formalizm nieekstensywnej mechaniki statystycznej oparty na uogólnionej entropii Tsallisa i wynikająca z niej rodzina rozkładów tzw. q -Gaussianów stanowią na dzień dzisiejszy najbardziej zwartą, teoretyczną strukturę opisującą rozkłady prawdopodobieństwa tego typu fluktuacji finansowych na różnych skalach czasowych. Powyższy wniosek może okazać się również pomocny w lepszym zrozumieniu procesów zachodzących w tak skomplikowanym systemie, jakim jest rynek finansowy, a także przyczynić się do stworzenia bardziej realistycznego modelu kontroli ryzyka niż np. model Blacka-Scholesa-Mertona.

Bibliografia

- Bachelier L., 1900, *Theorie de la speculation*, Ph.D. thesis in mathematics, „Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure” nr III-17.
- Bartolozzi M., Drożdż S., Leinweber D.B., Speth J., Thomas A.W., 2005, *Self-Similar Log-Periodic Structures in Western Stock Markets from 2000*, „Int. J. Mod. Phys. C” nr 16.
- Drożdż S., Grümmer F., Ruf F., Speth J., 2003, *Log-periodic self-similarity: an emerging financial law?*, „Physica A” nr 324.
- Drożdż S., Kwapien J., Grümmer F., Ruf F., Speth J., 2003, *Are the contemporary financial fluctuations sooner converging to normal?*, „Acta Phys. Pol. B” nr 34.
- Einstein A., 1905, *Investigations on the Theory of Brownian Movement*, „Ann. Phys.” nr 17.
- Gopikrishnan P., Meyer M., Amaral L.A.N., Plerou V., Stanley H.E., 1999, *Scaling and Volatility Correlations in the Stock Market*, „Phys. Rev. E” nr 60.
- Gopikrishnan P., Meyer M., Amaral L.A.N., Stanley H.E., 1998, *Inverse Cubic Law for the Probability Distribution of Stock Price Variations*, „Eur. Phys. J. B: Rapid Communications” nr 3.
- Hurst H.E., 1951, *Long Term Storage Capacity of Reservoirs*, „Transactions of American Society of Civil Engineers” nr 116.
- Kwapien J., Oświęcimka P., Drożdż S., 2005, *Components of multifractality in high-frequency stock returns*, „Physica A” nr 350.
- Levy P., 1925, *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris.
- Mandelbrot B.B., 1963, *The Variation of Certain Speculative Prices*, „J. Business” nr 36.
- Mantegna R. N., Stanley H.E., 1995, *Scaling Behavior in the Dynamics of an Economic Index*, „Nature” nr 376.

- Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A., 1994, *The Multifractal Formalism revisited with wavelets*, „National Journal of Bifurcation and Chaos”, Vol. 2. No. 2, 245.
- Osorio R., Borland L., Tsallis C., 2004, *Distributions of high-frequency stock-market observables in Nonextensive Entropy—Interdisciplinary Applications*, Oxford University Press, New York.
- Oświęcimka P., Kwapień J., Drożdż S., 2005, *Multifractality in the stock market: price increments versus waiting times*, „Physica A” nr 347.
- Pareto V., 1897, *Cours d’Economie Politique*, F. Rouge, Lausanne.
- Plerou V., Gopikrishnan P., Amaral L.A.N., Meyer M., Stanley H.E., 1999, *Scaling of the Distribution of Price Fluctuations of Individual Companies*, „Phys. Rev. E” nr 60.
- Queiros S.M., Anteneodo C., Tsallis C., 2005, *Power-law distributions in economics: a nonextensive statistical approach*, „Proceedings of SPIE” Volume 5848, *Noise and Fluctuations in Econophysics and Finance*, May.
- Rak R., 2008, *Ilościowe charakterystyki fluktuacji i korelacji na polskim rynku akcji*, rozprawa doktorska, Uniwersytet Rzeszowski, Inst. Fizyki.
- Rak R., Drożdż S., Kwapień J., 2007, *Nonextensive statistical features of the Polish stock market fluctuations*, „Physica A” nr 37
- Smoluchowski M., 1906, *Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen*, „Ann. Phys.” nr 21.
- Tsallis C., 1988, *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*, „J. Stat. Phys.” nr 52.
- Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R., 1998, *The role of constraints within generalized nonextensive statistics*, „Physica A” nr 261.
- Tsallis C., Anteneodo C., Borland L., Osorio R., 2003, *Nonextensive statistical mechanics and economics*, „Physica A” nr 324.

A b s t r a c t Characteristics of Financial Fluctuations

A

The study will examine the probability distributions of returns for the WIG20 index and the portfolio for the period from 17.11.2000 to 30.06.2005. These are the highest frequency (1 min) and the so-called tick by tick data (quotes at the time of the transaction). Except the data from the Polish stock market, the data from so-called mature markets (such as trading for the 1000 largest companies from the NYSE and NASDAQ index) will be analyzed. The analytical form of distributions (called q-Gaussian) will also be proposed. Nowadays it is one of the best representations describing the actual distributions.