Teoriogrowy model inflacji. Wpływ oczekiwań inwestorów na rzeczywisty poziom inflacji

Aleksandra Dzbanuszkiewicz, studentka
Wydział Nauk Ekonomicznych UW
Michał Ejdys, student
Wydział Nauk Ekonomicznych UW

1. Wprowadzenie

Inflacja jest jednym z ciekawszych zjawisk w ekonomii. Powstało już wiele modeli, próbujących uchwycić i wyjaśnić to zagadnienie. Niestety, wpływ na kształtowanie się inflacji ma bardzo wiele złożonych zjawisk. Dodatkowo dynamika tych zmian jeszcze bardziej utrudnia analizę.

Inspiracją do przeprowadzenia naszych badań, których wyniki prezentujemy w niniejszej pracy, była chęć uchwycenia wpływu decyzji inwestycyjnych poszczególnych inwestorów na kształtowanie się inflacji. Drugim ważnym zagadnieniem, którym się zajęliśmy, jest wpływ oczekiwań inflacyjnych na decyzje tychże inwestorów. Te dwie zależności (wpływ oczekiwań na decyzje oraz decyzji na inflację) są ze sobą bardzo ściśle powiązane. Celowe jest zatem rozpatrywanie ich łącznie.

Narzędziem naszej analizy będzie model teoriogrowy rynku pieniądza, który sami zbudujemy. Zaangażowanie teorii gier do modelowania zjawiska pozwoli nam lepiej zrozumieć interakcje pomiędzy poszczególnymi uczestnikami rynku inwestycji.

Drugi rozdział zawiera częściowe omówienie zjawisk ekonomicznych wykorzystywanych w pracy oraz definiuje zbudowany przez nas model teoriogrowy. Rozdział trzeci poświęcony jest opisowi zachowania pojedynczego uczestnika gry.

Kolejne rozdziały prezentują najciekawsze elementy przeprowadzonej analizy zbudowanego modelu w kilku różnych przypadkach składu rynku. Wyprowadzenia analityczne zilustrowane są wykresami pochodzącymi z symulacji działania modelu.

W ostatnim rozdziale zawarte zostało krótkie podsumowanie pracy.

2. Budowa modelu teoriogrowego

2.1. Oczekiwania inflacyjne

Inwestorzy podejmując decyzję, jak wykorzystać dostępny kapitał, biorą pod uwagę wiele czynników rynkowych. Jednym z najważniejszych, który jednocześnie stanowi jedną z podstaw dla niniejszej pracy, jest inflacja. Podmioty gospodarcze mogą mieć różne oczekiwania wobec inflacji. My będziemy zajmować się dwoma rodzajami takich oczekiwań: adaptacyjnymi oraz racjonalnymi.

Podmioty ekonomiczne o oczekiwaniach adaptacyjnych formułują swoje oczekiwania co do przyszłości na podstawie doświadczeń historycznych, przedłużając w przyszłość działanie dotychczasowych trendów, praw lub funkcji. Odmienne podejście reprezentują inwestorzy o oczekiwaniach racjonalnych. Przez obserwację i analizę konkretnych sytuacji, które prowadzą do systematycznych błędów, inwestorzy ci podejmują działania, aby błędów takich unikać. Konsekwencją takiego działania jest to, iż inwestorzy nie popełniają systematycznych błędów w ocenie przyszłych zjawisk. Posiadając dostęp do informacji, w pełni je wykorzystują. Błędy oczywiście nadal występują, ale raczej rzadko i przypadkowo (zob.: [McCallum, 1989]).

W naszej pracy przyjmiemy następujące postacie funkcji oczekiwań inflacyjnych:

- $\pi^e(t) = \lambda\big(\pi(t-1) - \pi^e(t-1)\big) + \pi^e(t-1)$ (dla oczekiwań adaptacyjnych),
- $\pi^e(t) = \pi(t)$ (dla oczekiwań racjonalnych),

gdzie $\pi^e(t)$ oznacza poziom inflacji oczekiwanej w okresie t, $\pi(t)$ poziom inflacji rzeczywistej z okresu t, a współczynnik $\lambda \in (0, 1)$.

2.2. Sytuacja pojedynczego inwestora

2.2.1. Wybór

Każdy uczestnik rynku (zwany dalej inwestorem) ma do wyboru dwie możliwości zainwestowania pewnej kwoty. Decyzja A jest obarczona ryzykiem inflacyjnym, decyzja B natomiast jest inwestycją wolną od ryzyka związanego ze zmianą cen. Aby odnieść taką sytuację do rzeczywistości, możemy wyobrazić sobie osobę decydującą, czy umieścić pieniądze na zagranicznej lokacie walutowej, czy zainwestować na przykład w budowę nowych domów.

Zysk realny z opcji A, obarczonej ryzykiem inflacyjnym, wyniesie:

$$\frac{a - \pi(t)}{1 + \pi(t)}$$

gdzie a to zysk nominalny z tej inwestycji. Z kolei zysk realny z opcji B, nieobarczony ryzykiem inflacyjnym, równy jest nominalnemu i wynosi b.

2.2.2. Decyzja

Decyzja, jaką podejmuje inwestor, to rozdysponowanie dochodu między dostępne inwestycje A i B. Odzwierciedleniem tej decyzji jest wartość

$\sigma \in (0,1)$, interpretowana jako część dochodu przeznaczona na inwestycję A. Inwestor będzie dążył do maksymalizacji funkcji przewidywanego zysku:

$$W^e(t) = \sigma(t)\frac{a - \pi^e(t)}{1 + \pi^e(t)} + (1 - \sigma(t))b$$

gdzie π^e jest poziomem oczekiwanej przez inwestora inflacji. Warto zwrócić uwagę, że inwestor podejmuje decyzje opierając się na swoich oczekiwaniach inflacyjnych, a nie na faktycznym poziomie inflacji, którego nie zna w momencie podejmowania decyzji.

2.2.3. Wypłata

Faktyczna wypłata zależy natomiast od rzeczywistego poziomu inflacji:

$$W(t) = \sigma(t)\frac{a - \pi(t)}{1 + \pi(t)} + (1 - \sigma(t))b$$

gdzie π — poziom inflacji, jaki wystąpił w danym okresie.

2.3. Rynek pieniądza

W naszej pracy oparliśmy się na Modelu IS-LM i skupiliśmy na analizie równowagi na rynku pieniądza. Podążając za podejściem Cagana (zob.: [Cagan, 1956]), przyjmijmy następującą postać funkcji popytu na pieniądz:

$$L(t) = \alpha Y + \sum_{i \in I}\left(1 - \sigma_t(t)\right)A_i$$

gdzie αY to część dochodu narodowego przeznaczana na inwestycję, A_i to dochód, którym dysponuje i-ty uczestnik rynku, a $\sigma_i(t)$ jest jego decyzją w okresie t.

Inflację w modelu wyprowadzimy z równania równowagi na rynku pieniądza $\left(\frac{M^S}{P(t)} = L(t)\right)$.

$$\pi(t) = \frac{P(t)}{P(t-1)} - 1 = \frac{M^S}{L(t)} \cdot \frac{L(t-1)}{M^S} - 1 = \frac{L(t-1)}{L(t)} - 1 \qquad (1)$$

2.4. Dodatkowe założenia

Dla uproszczenia przyjmujemy, że inwestor posiada pełen dostęp do informacji o rynku oraz wpływie wielkości własnych inwestycji na poziom inflacji. Dodatkowo można przyjąć, że gospodarka kraju jest stabilna i nie ma powodów zakładać, iż poziom inflacji zmieni się w najbliższym czasie w drastyczny sposób z przyczyn egzogenicznych.

Podstawowe założenia:

1. Dochód (Y), stopa procentowa (i) oraz podaż pieniądza (M) są niezmienne w czasie.
2. Rynek pieniądza znajduje się w równowadze.
3. Rząd prowadzi stałą politykę fiskalną i monetarną.

3. Pojedynczy inwestorzy

3.1. Inwestor racjonalny

Na początek przyjrzyjmy się sytuacji rynku, na którym działa tylko jeden gracz i posiada on racjonalne oczekiwania inflacyjne (zob.: rozdz. 2.1.). Wówczas oczekiwany poziom inflacji będzie równy realnemu, a funkcja oczekiwanego zysku (p. 2.2.2.) będzie równa wypłacie (p. 2.2.3.). Funkcja wypłaty, po uwzględnieniu oczekiwań inflacyjnych równych inflacji, przyjmuje postać:

$$W^e(t) = \sigma(t)\frac{a\alpha Y + aA - aA\sigma(t) - A\sigma(t) + A\sigma(t-1)}{\alpha Y + A - A\sigma(t-1)} + (1 - \sigma(t))b$$

Powyższa funkcja jest funkcją kwadratową ze względu na $\sigma(t)$. Optymalna[1] decyzja wyniesie zatem:

$$\sigma(t) = \frac{\alpha Y(a-b) + A\sigma(t-1)(1-b) + A(a-b)}{2A(a+1)} \tag{2}$$

Wyniki symulacji dla tego przypadku zostaną zaprezentowane później (p. 5.2.).

3.2. Inwestor adaptacyjny

W przeciwieństwie do gracza o oczekiwaniach racjonalnych, gracz adaptacyjny nie bada wpływu swojej decyzji na przyszłą inflację. Ogranicza się do sformułowania oczekiwań inflacyjnych na podstawie danych z minionego okresu. Na ich podstawie podejmuje optymalną dla siebie decyzję. O ile jednak w przypadku gracza racjonalnego wypłata oczekiwana zawsze równała się rzeczywistej, o tyle w tym przypadku tak nie jest.

Załóżmy, że w okresie $t = 0$ inwestor nie uczestniczył w rynku, a inflacja wynosiła 0 ($\pi(0) = 0$). Konsekwencją oczekiwań adaptacyjnych będzie spodziewany przez inwestora poziom inflacji: $\pi^e(1) = 0$. W związku z tym jego funkcja spodziewanej wypłaty przyjmie postać:

$$W^e(1) = \max(a, b)$$

Rzeczywista inflacja wyniesie:

$$\pi(1) = \frac{\alpha Y}{\alpha Y + (1 - \mathbb{1}_{[a<b]})A} - 1$$

W związku z tym rzeczywista wypłata inwestora adaptacyjnego w pierwszym okresie wyniesie:

$$W(1) = \min(a, b)$$

---

[1] Zauważmy, że mamy ograniczenie $0 \le \sigma(t) \le 1$. W związku z tym wynik maksymalizacji funkcji kwadratowej należy skorygować, tj. przyjąć 0, jeśli $\sigma(t) < 0$ i 1, jeśli $\sigma(t) > 1$.

W niniejszej pracy ograniczymy się do jednego okresu, a więcej uwagi poświęcimy bardziej złożonym modelom.

4. Model $R + nA$[2]

4.1. Wyprowadzenie

W tym przypadku mamy do czynienia ze zbiorowością, składającą się z jednego inwestora o oczekiwaniach racjonalnych i wielu o oczekiwaniach adaptacyjnych.

Zauważmy na wstępie, iż zbiór n graczy o oczekiwaniach adaptacyjnych traktować możemy jako jednego gracza o skumulowanym kapitale. Każdy z nich przy podejmowaniu decyzji kieruje się bowiem tymi samymi zasadami i decyzję podejmuje biorąc pod uwagę jedynie informacje o poprzednim okresie decyzyjnym (konfrontuje oczekiwania z poprzedniego okresu z realiami inflacyjnymi).

W związku z tym prezentowany model możemy sprowadzić do badania interakcji między dwoma graczami — racjonalnym i adaptacyjnym, o oczekiwaniach (odpowiednio):

$$\pi_r^t(t) = \pi(t)$$

$$\pi_a^t(t) = \lambda\left(\pi(t-1) - \pi_a^t(t-1) + \pi_a^e(t-1)\right)$$

Oznaczmy dodatkowo przez A_r i A_a kapitał, jakim dysponuje — odpowiednio — gracz racjonalny i adaptacyjny, a przez $\sigma_r(t)$ i $\sigma_a(t)$ ich decyzje w okresie t.

Sposób kształtowania się wyborów inwestycyjnych będzie następujący: gracz adaptacyjny podejmuje decyzje bezwładnie, bazując na poprzednim okresie. Gracz racjonalny potrafi przewidzieć zachowanie tego pierwszego i dostosować się do niego tak, aby wyciągnąć z tego maksymalne dla siebie korzyści.

4.2. Symulacje

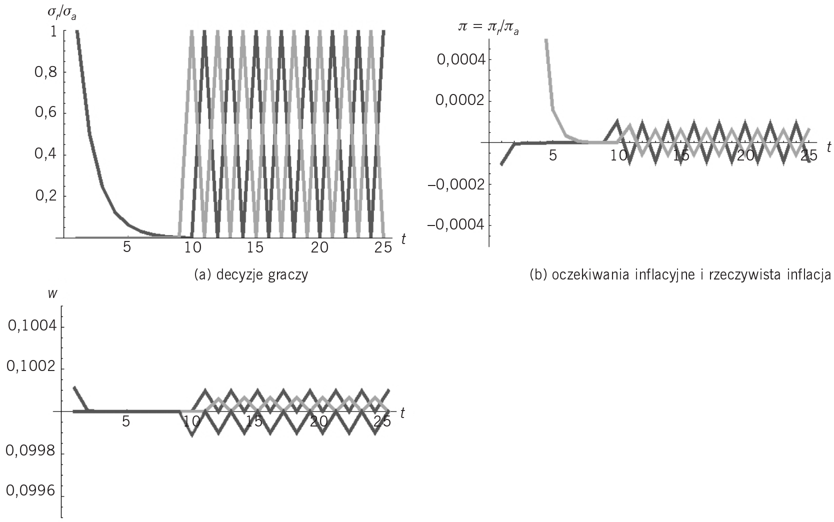
Aby zbadać przebieg ciągu decyzji w opisywanym modelu w różnych warunkach (przy różnych wartościach parametrów), przeprowadziliśmy symulację ciągu decyzji. Część parametrów przyjęliśmy za stałe: $\sigma_r(0) = \sigma_a(0) = 1$; $\pi_a^e(0) = \pi(0) = 0{,}1$; $A_r = 100$; $A_a = 1000$; $\alpha Y = 10\,000\,000$. Do grupy zmienianych parametrów włączyliśmy: a, b oraz λ. Decyzje inwestorów zaburzaliśmy losowo w przedziale (–10%, 10%). Przeanalizujmy kolejne wyniki symulacji.

4.2.1. Wpływ współczynnika adaptacji

Na początku przedstawiamy wpływ współczynnika adaptacji na przebieg gry. Ustalamy więc równe stopy zwrotu z inwestycji ($a = b = 0{,}1$), a następnie

[2] Model opisujący rynek złożony z gracza racjonalnego (R) i wielu (n) graczy o oczekiwaniach adaptacyjnych (A).

obserwujemy zmiany dla różnych poziomów λ. Rys. 1. przedstawia sytuację dla $\lambda = 0{,}8$)



(a) decyzje graczy

(b) oczekiwania inflacyjne i rzeczywista inflacja

(c) oczekiwane i rzeczywiste wypłaty

Rys. 1.

Średni współczynnik adaptacji ($a = b = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}8$)

W początkowym okresie widoczny jest proces dostosowywania się oczekiwań inflacyjnych gracza adaptacyjnego. Spodziewany przez niego poziom inflacji jest na tyle wysoki, że wpływa na postrzegane przez niego oczekiwane stopy zwrotu z inwestycji A i B i w konsekwencji powoduje zerojedynkowy wybór jednej z nich (linia żółta na wykresie). Jednocześnie zaobserwować można, iż w początkowych okresach gracz racjonalny (reprezentowany przez niebieską linię) doskonale przewiduje stałość zachowań gracza adaptacyjnego i wykorzystuje swoją pozycję, dynamicznie zmieniając decyzję. Graczowi racjonalnemu opłaca się utrzymywać niezerowy poziom inflacji.

W początkowych okresach wypłata graczy jest stale zbliżona do 0,10. Warto jednak przyjrzeć się dokładnie wartościom wypłat (rys. 1c). Wypłata gracza racjonalnego (rzeczywista — tożsama oczekiwanej) reprezentowana jest przez linię niebieską. Oczekiwaniom gracza adaptacyjnego odpowiada — jak zwykle — kolor żółty. Linia czerwona prezentuje natomiast rzeczywistą wypłatę gracza adaptacyjnego.

W pierwszym okresie gracz racjonalny wykorzystuje przewidywaną deflację oraz niewiedzę gracza adaptacyjnego. Dzięki temu udaje mu się uzyskać pewną przewagę w inwestycji, co pozwala na uzyskanie przez niego większej wypłaty.

Po pewnym czasie (około okresu 9) oczekiwania gracza adaptacyjnego zaczynają pokrywać się z rzeczywistą inflacją. Co ważniejsze, zmieniają się na tyle, że postrzegane przez niego oczekiwane stopy zwrotu skłaniają go do zmiany decyzji w 10. okresie i wyboru $\sigma_a(10) = 1$.

Po 10. okresie następuje bardzo interesujący proces. Gracz racjonalny podejmuje zawsze przeciwną decyzję do gracza adaptacyjnego ($\sigma_r = 1 - \sigma_a$). Ponieważ gracz adaptacyjny, będący kumulacją wielu graczy adaptacyjnych, reprezentuje znacznie większy kapitał niż gracz racjonalny, to wahania decyzji obu wpływają na inflację, która jest naprzemiennie dodatnia i ujemna.

Na wykresie wypłat obserwujemy efekty tej strategii. Gracz racjonalny utrzymuje stałą przewagę w wypłatach. Natomiast gracz adaptacyjny wciąż się myli w swoich przewidywaniach, naprzemiennie otrzymując ok. 0,10 oraz mniej.

Warto zastanowić się następnie, co się stanie, gdy zwiększymy współczynnik adaptacji do jego maksymalnej wartości ($a = b = 0{,}1$, $\lambda = 1{,}0$). W takiej sytuacji gracz adaptacyjny ma oczekiwania pokrywające się z inflacją z poprzedniego okresu ($\pi(t) = \pi(t - 1)$). Wpływa to na znaczne przyspieszenie w procesie dostosowawczym — już w drugim okresie obserwujemy naprzemienność decyzji obu graczy, ich przechodzenie od jednej do drugiej inwestycji. Dużo wcześniej zaczyna się również proces zmian wypłat i widocznej przewagi gracza racjonalnego.

Na koniec, przy wciąż niezmienionych stopach zwrotu, obniżony został współczynnik adaptacji ($a = b = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}45$). W sytuacji tej wydłużony został znacznie okres dostosowawczy gracza adaptacyjnego.

Bardzo interesująca okazała się natomiast zmiana w dalszych etapach symulacji. Tym razem gracz racjonalny ocenił, iż najbardziej opłaca mu się trwać przy jednej, stałej decyzji ($\sigma_r = 0$). Efektem jest zbieżność poziomu inflacji do poziomu 0 oraz niezmienna w czasie decyzja gracza adaptacyjnego.

Również wypłaty graczy zachowują się bardzo stabilnie. Wprawdzie gracz adaptacyjny zdołał wykorzystać swoją przewagę w pierwszym okresie, tak jak w przypadku rozpatrywanym na początku analizy graficznej, to jednak w kolejnych okresach wypłaty graczy były proporcjonalne.

4.2.2. Przewaga a nad b

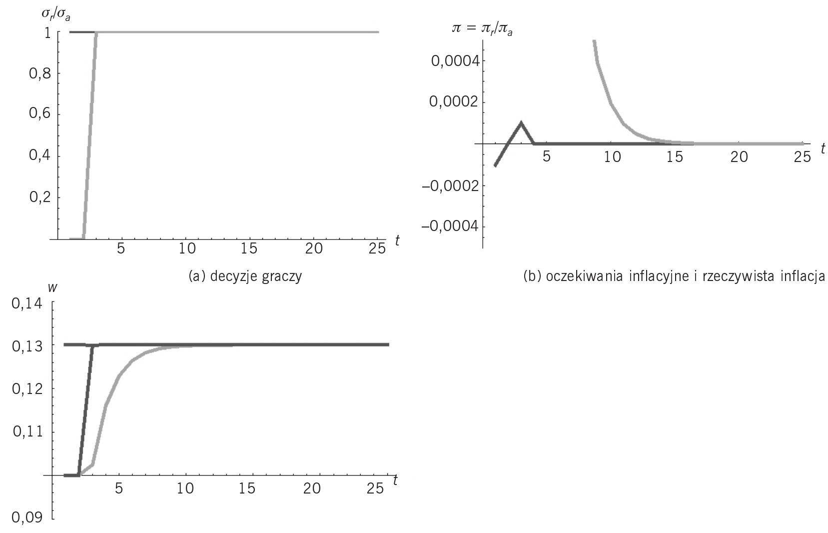
Celem kolejnej symulacji było zbadanie przypadku, w którym występuje różnica w stopach zwrotu z inwestycji — na korzyść a ($a = 0{,}13$, $b = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}5$) — rys. 2.

Przebieg symulacji jest o tyle interesujący, iż dokładnie obrazuje procesy zachodzące w modelu. Początkowo oczekiwania gracza adaptacyjnego znacznie odbiegają od zastanej na rynku inflacji. Przez kilka okresów podejmuje zatem konsekwentnie decyzję $\sigma_a = 0$ zgodnie ze swoimi oczekiwaniami wysokiej inflacji. Gracz racjonalny wie jednak, że inflacja jest i będzie niewysoka (przez moment nawet ujemna) i wybiera optymalne $\sigma_r = 0$. Należy zauważyć, iż inflacja w drugim okresie wyniosła 0. Wynika to z faktu, iż w tym okresie żaden z graczy nie zmienia decyzji.

W okresie 3. oczekiwania gracza adaptacyjnego na tyle spadły, iż skłoniło go to do przejścia do drugiej inwestycji (zmiany na $\sigma_a = 1$). Spowodowało to oczywiście wzrost inflacji. Gracz racjonalny natomiast konsekwentnie trwał przy swoim wyborze.

Warto zwrócić uwagę na charakterystyczną cechę przebiegu wypłat gracza adaptacyjnego. Jego oczekiwania były dużo mniej optymistyczne niż rzeczywiste wypłaty. Te wzrosły, reagując natychmiast na jego decyzję. Gracz spodziewał się, zgodnie z powolnym procesem adaptacji oczekiwań do rzeczywistości, stopniowych zmian.

Ostatecznie gracze pozostali w dalszych okresach przy swoich decyzjach ($\sigma = 1$). Spowodowało to utrzymywanie się inflacji na poziomie 0 oraz zbieżność oczekiwań gracza adaptacyjnego do poziomu inflacji.



(a) decyzje graczy

(b) oczekiwania inflacyjne i rzeczywista inflacja

(c) oczekiwane i rzeczywiste wypłaty

Rys. 2.

Przewaga a nad b (a = 0,13, b = 0,1, λ = 0,45)

5. Model nR[3]

5.1. Wyprowadzenie

Załóżmy teraz, iż mamy do czynienia z wieloma graczami, wszyscy o oczekiwaniach racjonalnych. Każdy gracz jest więc w stanie przewidzieć poziom inflacji w zależności od decyzji własnej oraz pozostałych graczy. Przy podejmowaniu własnej decyzji bierze on pod uwagę sposób, w jaki decydują pozostali gracze.

[3] Model opisujący rynek złożony z wielu (n) graczy racjonalnych (R).

W dalszej analizie zajmować się będziemy zachowaniem wyróżnionego inwestora na tle wyborów tzw. reszty świata — tj. pozostałych graczy rozpatrywanych łącznie. Ich pojedyncze decyzje możemy potraktować całościowo ($\sigma_{-k}(t)$). Podobnie zainwestowany kapitał możemy skumulować (A_{-k}). Weźmy więc gracza k i przeanalizujmy jego strategię.

W momencie startu mamy oczywiście, jak poprzednio, inflację zerową. Dla każdego kolejnego okresu wyliczamy ją z wzoru (1), uwzględniając fakt, iż mamy *de facto* dwóch uczestników rynku. Następnym krokiem będzie wyznaczenie oczekiwanego zysku, co zrobimy uwzględniając wyliczony poziom inflacji we wzorze na funkcję oczekiwanej wypłaty. Uzyskując ponownie funkcję kwadratową ze względu na $\sigma(t)$, zmaksymalizujemy ją, uzyskując optymalny wynik:

$$\sigma_k(t) = \frac{\sigma_k(t-1)(1+b)+a-b}{2(1+a)} + \\ + \frac{A_{-k}\left(\sigma_{-k}(t-1)(1+b)-\sigma_{-k}(t)(1+a)+a-b\right)+\alpha Y(a-b)}{2(1+a)A_k} \tag{3}$$

Znaleźliśmy zatem optymalny wybór wyróżnionego gracza racjonalnego. Wiemy, iż wszyscy pozostali gracze również mają oczekiwania racjonalne. Załóżmy dodatkowo, że każdy z graczy dysponuje takim samym kapitałem do zainwestowania. W takiej sytuacji decyzja każdego z graczy będzie identyczna. Dla uproszczenia notacji oznaczmy przez $\frac{A}{n}$ kapitał pojedynczego gracza racjonalnego (jako ułamek całego kapitału, jakim łącznie dysponują wszyscy gracze), a przez $\sigma(t)$ — jego decyzję na okres t. Wykorzystując powyższe zależności i wychodząc z równania (3), możemy wyliczyć:

$$\sigma(t) = \frac{n\left(\sigma(t-1)A(1+b)+\alpha Y(a-b)+A(a-b)\right)}{(1+a)(1+n)}$$

Wyznaczoną decyzję należy jeszcze skorygować w znany już nam z poprzednich analiz sposób (należy przyjąć wartość 0, jeśli wyliczona decyzja będzie mniejsza od zera i 1, jeśli będzie większa od 1).

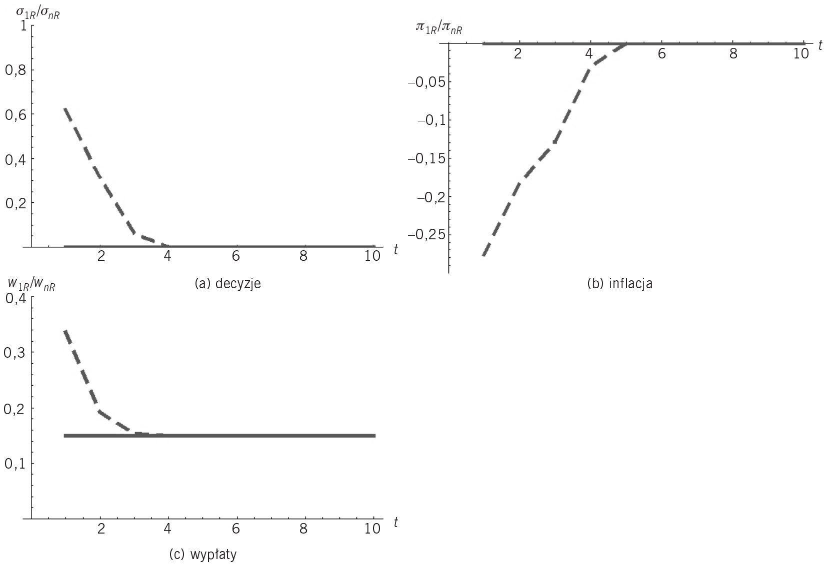
Zauważmy, iż każdy z graczy znajduje się w sytuacji, w której podjęcie jakiejkolwiek innej decyzji niż wyliczona powyżej, zmniejszyłoby jego wypłatę. Znaleziony układ strategii jest zatem równowagą Nasha w tej grze.

Zastanówmy się, jak zmienia się decyzja graczy w zależności od liczby uczestników rynku. Sprawdźmy, jaka jest graniczna wartość przy n dążącym do nieskończoności.

$$\sigma^*(t) = \lim_{n\to\infty}\sigma(t) = \frac{\sigma(t-1)A(1+b)+\alpha Y(a-b)+A(a-b)}{(1+a)A}$$

5.2. Odniesienie do rynku z pojedynczym inwestorem

Dokonajmy porównania sytuacji z rynkiem z wieloma graczami racjonalnymi do rynku z jednym graczem racjonalnym (zob.: 3.1). Aby zilustrować różnice w tych rynkach, przeprowadziliśmy odpowiednie symulacje, dla których przyjęliśmy następujące parametry: a = 0,05, b = 0,15, A = 10 000 000, αY = 10 000 000.



Rys. 3.

Porównanie decyzji, inflacji i wypłat w modelach pojedynczego i wielu inwestorów racjonalnych

Wyniki przeprowadzonej symulacji widoczne są na rys. 3. Efekty działań jednego inwestora w modelu nR oznaczone są linią ciągłą, przerywaną natomiast oznaczono decyzje, wypłaty i inflację w modelu pojedynczego inwestora.

Jak widać, gracz decydujący jednoosobowo o całym kapitale może wyciągać z tego faktu dodatkowe korzyści. Swoimi decyzjami wywołuje on deflację i osiąga przez kilka początkowych okresów wyższe wypłaty niż gracz w modelu nR.

6. Model $R + nX$[4]

6.1. Wprowadzenie

W tym rozdziale zajmiemy się uogólnieniem modelu z poprzedniego rozdziału. Wychodząc od równania inflacyjnego, dalszą analizę przeprowadźmy dla sytuacji, kiedy mamy do czynienia z graczem o oczekiwaniach racjonalnych i nieznaną resztą świata. Pozostali gracze mogą więc być w całości zarówno racjonalni, jak i adaptacyjni — obydwa przypadki zostały już omó-

[4] Model opisujący rynek złożony z gracza racjonalnego (R) oraz wielu (n) graczy o bliżej nieokreślonych oczekiwaniach (X).

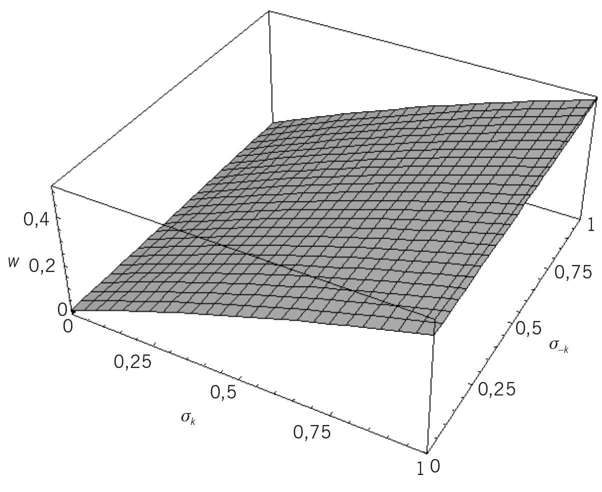
wione. Może się również zdarzyć, iż świat będzie się składał z jednych i drugich. W tym rozdziale dopuszczamy jednak również inne sytuacje. Gracze stanowiący resztę świata mogą mieć dowolnie przypisany rozkład prawdopodobieństwa, z jakim wybierają poziomy σ. Jak w takiej sytuacji powinien podejmować decyzję gracz racjonalny?

Przeanalizujmy teraz możliwe wypłaty gracza k w zależności od decyzji reszty świata oraz jego własnych strategii. Podobnie jak w poprzednich analizach ustaliliśmy pewne poziomy niezmienne dla kolejnych symulacji: $\sigma_k(0) = 1$, $\sigma_{-k}(0) = 1$, $A_k = 100$, $A_{-k} = 10\ 000$, $\alpha Y = 100\ 000$.

6.2. Symulacje

6.2.1 Zdecydowana przewaga a nad b

Na początek spójrzmy na sytuację, przy której łatwo jest przewidzieć działania gracza racjonalnego. Rys. 4. przedstawia sytuację, gdy zwrot z inwestycji A jest zdecydowanie większy niż z B. Nietrudno zauważyć, iż dla każdej możliwej decyzji reszty świata graczowi o oczekiwaniach racjonalnych nie opłaca się decyzja inna od $\sigma(t) = 1$. Wynika z tego, że strategia ta jest ściśle dominująca. Przy każdym innym poziomie $\sigma(t)$ uzyskałby on niższą wypłatę. W tym wypadku widać więc, że na decyzję naszego inwestora nie ma żadnego wpływu to, jakie oczekiwania reprezentują pozostali gracze.



Rys. 4.

Zdecydowana przewaga a nad b (a = 0,5, b = 0,005)

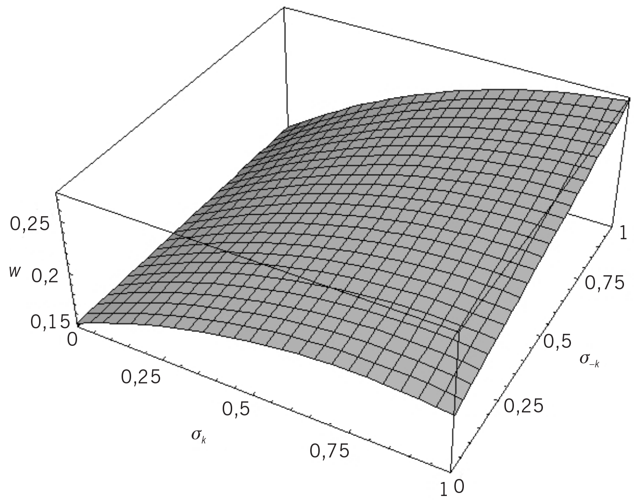
Wróćmy jeszcze na chwilę do sytuacji, gdy wszyscy gracze na rynku są racjonalni (zob.: rozdz. 5.). Wtedy dla każdego i mamy $\sigma_i(t) = 1$, co prowadzi do równowagi Nasha. Warto zwrócić uwagę, iż znaleziona równowaga Nasha jest również równowagą w strategiach ściśle dominujących, gdyż nie tylko żadnemu z graczy nie opłaca się zmienić swojej strategii, ale ponadto otrzymuje on najwyższą możliwą wypłatę w grze.

Przypadek zdecydowanej przewagi b nad a jest analogiczny do opisanego.

6.2.2. Niewielka przewaga a nad b

Zastanówmy się teraz, co się zmieni, jeśli a nadal będzie większe od b, ale już nie w tak dużym stopniu. Rys. 5. przedstawia właśnie taką sytuację.

Jeśli założylibyśmy, iż wszyscy gracze są racjonalni i wiedzą o tym, to przez analogię do opisywanej już sytuacji bez trudu doszlibyśmy do równowagi Nasha odpowiadającej wektorowi decyzji złożonemu z samych jedynek. W sytuacji niepewności wobec oczekiwań i wynikających z nich strategii pozostałych graczy na rynku, nie możemy jednak stwierdzić, iż gracz zoptymalizuje swoją wypłatę korzystając jedynie ze swoich strategii czystych.



Rys. 5.

Niewielka przewaga a nad b (a = 0,25, b = 0,15)

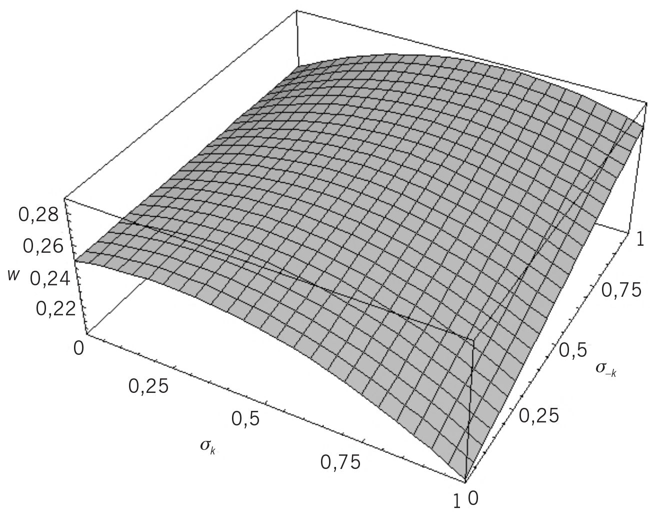
Z pewnością można zauważyć, iż mamy tutaj kilka strategii zdominowanych, np. $\sigma(t) = 0$ zawsze przyniesie zysk mniejszy niż na przykład $\sigma(t) = 0{,}5$. Inwestor nie ma jednak żadnej strategii dominującej.

Można się zastanowić nad sytuacją, gdy reszta świata ma przypisany jakiś rozkład prawdopodobieństwa, według którego podejmuje decyzje o wielkości kapitału przeznaczonego na inwestycję A. Najprostszy jest oczywiście rozkład jednopunktowy. Gracz racjonalny, znając dokładnie poziom decyzji reszty świata, wybiera najlepszą możliwą odpowiedź na postępowanie innych inwestorów uzyskując swój maksymalny możliwy zysk.

Bardziej skomplikowana jest sytuacja, gdy rozkład prawdopodobieństwa świata jest dwupunktowy. Dla ustalenia uwagi, załóżmy, iż z prawdopodobieństwem p gracze wybiorą poziom $\sigma_{-k}(t) = 0$ i z prawdopodobieństwem $(1 - p)$ poziom $\sigma_{-k}(t) = 1$. Zastanówmy się, jak w takiej sytuacji gracz racjonalny podejmuje decyzję. Gdyby analizował każdą z decyzji świata osobno i ustalał swoją najlepszą możliwą odpowiedź na każdą z nich oddzielnie, otrzymalibyśmy: dla $\sigma_{-k}(t) = 0$ zmaksymalizuje on swoją wypłatę, grając $\sigma(t) \approx 0{,}78$ natomiast dla $\sigma_{-k}(t) = 1$ wybierze on poziom $\sigma(t) = 1$. Ponieważ jednak decyzja świata wynika ze strategii mieszanej, można przypuszczać, że gracz podejmując decyzję, bierze pod uwagę obie możliwe sytuacje łącznie. Bez szczegółowej analizy nie ma jednak pewności, jaka decyzja jest dla gracza optymalna (być może wybierze on strategię czystą różną od wskazanych powyżej).

6.2.3. Równe stopy zwrotu

Ostatnim omawianym przypadkiem będzie sytuacja przedstawiona na rys. 6., kiedy to stopy zwrotu z A i B są sobie równe. Ponownie mamy tu do czynienia z sytuacją, gdy można wykreślić z analizy kilka strategii zdominowanych, ale nie istnieje, w strategiach czystych, strategia dominująca.



Rys. 6.

Równe stopy zwrotu ($a = b = 0{,}25$)

Przypuszczalnie strategia będąca najlepszą odpowiedzią na każde posunięcie świata jest złożona z decyzji z odcinka (0,25, 0,75), ponieważ wszystkie inne strategie są ściśle zdominowane. Nie można jednak bez głębszej analizy wywnioskować konkretnej strategii gracza racjonalnego. Wiemy tylko, że szukając równowagi będzie się poruszał po garbie widocznym na wykresie.

7. Podsumowanie

W naszej pracy zbudowaliśmy model opisujący zachowanie inwestorów — ich oczekiwania inflacyjne, decyzje inwestycyjne oraz zwroty z inwestycji. Rozpatrzyliśmy szereg przypadków funkcjonowania modelu — poczynając od pojedynczych inwestorów (tak racjonalnych, jak i adaptacyjnych) i przechodząc do złożonych rynków (gracz racjonalny z wieloma graczami adaptacyjnymi, wielu graczy racjonalnych, gracz racjonalny i wielu innych o nieznanych oczekiwaniach). W pracy zaprezentowaliśmy skrócony opis modelowania analitycznego oraz zaprezentowaliśmy działanie modelu za pomocą symulacji, wykresów i interpretacji.

Praca zawiera opisy różnych rynków. Wykazaliśmy różnice w sposobie podejmowania decyzji przez poszczególne grupy inwestorów. Udało nam się potwierdzić wiele naszych intuicji na ten temat, wyjaśnić schemat podejmowania decyzji przez różnych inwestorów. Jednym z ciekawszych wniosków było spostrzeżenie, iż pojedynczy gracz racjonalny podejmuje swoją decyzję inwestycyjną inaczej, gdy wie, że jest jedynym uczestnikiem rynku, niż w przypadku, gdy jest jedynie jednym z wielu graczy. Obserwacja ta zmusza do krytycznego spojrzenia na upraszczanie modeli inflacyjnych przez wykorzystywanie reprezentatywnego konsumenta. Jak wynika z naszej pracy, uproszczenie takie może mieć wpływ na sposób postępowania inwestora.

Bibliografia

Cagan P., 1956, *The Monetary Dynamics of Hyperinflation*, w: *Studies in the quantity theory of money*, red. Milton Friedman, The University of Chicago Press.

McCallum B., 1989, *Monetary Economics*, Macmillan Publishing Company, New York.

Malawski M., Wieczorek, Sosnowska H., 2004, *Konkurencja i kooperacja: teoria gier w ekonomii i naukach społecznych*, PWN, Warszawa.

Nash J., 1951, *Non-cooperative games*, w: „Annuals of Mathematics", vol. 54, nr 2, wrzesień.

Sargent T., Wallace N., 1973, *Rational excpectations and the dynamics of hyperinfiation*, w: „International Economic Review", vol. 14, nr 2.