Pomiar i modelowanie zmienności — przegląd literatury

Juliusz Jabłecki, mgr, Instytut Ekonomiczny, Narodowy Bank Polski
Ryszard Kokoszczyński, prof. dr hab., Instytut Ekonomiczny, Narodowy Bank Polski i Wydział Nauk Ekonomicznych UW
Paweł Sakowski, dr, Wydział Nauk Ekonomicznych UW
Robert Ślepaczuk, dr Wydział Nauk Ekonomicznych UW
Piotr Wójcik,dr Wydział Nauk Ekonomicznych UW

Słowa kluczowe: zmienność historyczna, zmienność implikowana GARCH, wycena opcji

Klasyfikacja JEL: C58, G13

1. Wstęp

Celem niniejszego artykułu[1] jest przedstawienie głównych koncepcji dotyczących pomiaru, prognozowania i modelowania zmienności cen instrumentów finansowych. Chociaż pojęcie zmienności wydaje się intuicyjnie zrozumiałe — oznacza zakres rozproszenia realizacji danej zmiennej losowej — ścisła definicja nie jest wcale oczywista, a Goldstein i Taleb [2007] stwierdzają nawet, że

nie wiemy na ogół, o czym tak naprawdę mówimy, gdy mówimy o zmienności[2].

Wynika to zapewne po części z tego, że zmienność jako taka nie jest bezpośrednio obserwowalna — w takim sensie, w jakim obserwowalna jest np. cena 5-letniej benchmarkowej obligacji skarbowej — musi się zrealizować w czasie i zostać wyestymowana. To z kolei nasuwa naturalne pytania o poprawną metodę estymacji zmienności na daną chwilę w czasie, a także o możliwość sformułowania prognozy na przyszłość.

Obszerną dziś literaturę dotykającą zagadnienia zmienności można w pewnym uproszczeniu podzielić na dwa nurty: teoretyczny, interesujący się zmiennością od strony statystyczno-ekonometrycznej, oraz praktyczny,

---

[1] Artykuł przygotowany w ramach realizacji projektu badawczego 2011/03/B/HS4/02298 finansowanego przez NCN. Artykuł wyraża osobiste poglądy autorów, a nie instytucji, z którymi są związani.

[2] W artykule o tym nieco prowokacyjnym tytule Goldstein i Taleb [2007] relacjonują wyniki badania przeprowadzonego w grupie 87 profesjonalnych uczestników rynku finansowego, z którego wynika, że zdecydowana większość myli pojęcie odchylenia średniokwadratowego — czyli odchylenia standardowego będącego popularnym estymatorem zmienności — ze średnim odchyleniem od wartości oczekiwanej.

związany z teorią finansów oraz jej zastosowaniami — alokacją aktywów, zarządzaniem ryzykiem oraz wyceną instrumentów finansowych[3]. Nurty te spotykają się i przenikają wzajemnie w nowoczesnej teorii wyceny opcji[4], której podstawy sformułowali Black i Scholes [1973] oraz równolegle Merton [1973] (dalej Black-Scholes-Merton, BSM).

Błyskotliwość podejścia BSM zasadza się na spostrzeżeniu, że opcje nie są instrumentami niezależnymi i można je zreplikować wykorzystując prostsze aktywa. Ponieważ opcja call na akcje np. IBM zyskuje na wartości wraz ze wzrostem ceny akcji spółki, to wydaje się naturalne, że ta kierunkowa ekspozycja może być wyeliminowana poprzez krótką sprzedaż odpowiedniej liczby akcji IBM. Można pokazać, że w celu zneutralizowania liniowej części ekspozycji w opcji C, należy zająć odwrotną pozycję w $\frac{\partial C}{\partial S}$ jednostkach instrumentu bazowego S[5]. Inaczej mówiąc, posiadając portfel składający się z długiej pozycji w opcji call i krótkiej pozycji w odpowiedniej liczbie akcji, uzyskuje się pozycję lokalnie wolną od ryzyka. Formalizując tę intuicję (i biorąc pod uwagę upływ czasu, koszty finansowania oraz warunek braku arbitrażu), otrzymuje się słynne równanie różniczkowe Blacka-Scholesa:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}S^2\sigma^2+\frac{\partial C}{\partial t}+r\left(\frac{\partial C}{\partial S}S-C\right)=0 \tag{1}$$

którego rozwiązaniem jest wzór na cenę europejskiej opcji call:

$$C=SN(d_1)-e^{-r(T-t)}KN(d_2) \tag{2}$$

[3] Zmienność, rozumiana jako niepewność wokół realizacji oczekiwanej stopy zwrotu z inwestycji, stosunkowo późno pojawia się w teorii finansów — po raz pierwszy w pracach Markowitza [1952; 1959], a następnie u Sharpe'a [1964] oraz Lintnera [1965] w ich modelu CAPM. Co ciekawe, jeszcze w 1938 r. J.B. Williams w klasycznej pracy na temat inwestowania *The Theory of Investment Value*, wydanej przez prestiżowe wydawnictwo Harvard University Press, przekonywał, że inwestorzy powinni dokonywać alokacji aktywów na podstawie maksymalnej stopy zwrotu [Rebonato, 2007]. Teoria portfelowa Markowitza i jej późniejsze rozwinięcia dały podstawę z jednej strony do rozwoju teorii strategicznej alokacji aktywów, a z drugiej do formalizacji zarządzania ryzykiem. Wiąże się to ściśle z popularnością koncepcji wartości zagrożonej (*Value-at-Risk*, VaR), czyli określonego percentyla rozkładu strat z tytułu danego ryzyka. Szerzej patrz Damodaran [2007, rozdz. 7] oraz Jorion [2006].

[4] Prace Hulle [2009] i Neftciego [2008] zawierają obszerne, podręcznikowe, omówienie opcji, a także niektórych aspektów infrastruktury rynkowej. Dobrym źródłem informacji na temat praktycznych aspektów handlu opcjami pozostaje, mimo upływu czasu praca Natenberga [1994].

[5] Aby się o tym przekonać wystarczy rozwinąć nieznaną cenę opcji $C(\cdot)$ w szereg Taylora i sprawdzić, jak się ona zmieni po upływie czasu Δt i zmianie ceny akcji o ΔS. Mamy: $C(S+\Delta S, t+\Delta t) = C(S,t)+\frac{\partial C}{\partial S}\Delta S+\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(\Delta S)^2+\ldots$ Widać zatem, że ΔC jest funkcją kwadratową ΔS, a część liniowa może być wyrugowana przez krótką sprzedaż $\frac{\partial C}{\partial S}$ jednostek S.

gdzie $d_{1,2} = \frac{\ln(S/K) + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$, σ oznacza zmienność S, $(T - t)$ czas do wygaśnięcia opcji, K cenę wykonania, a r stopę procentową wyrażającą koszt finansowania pozycji.

Chociaż na opcje można patrzeć jak na swoiste ubezpieczenie chroniące przed niepożądanym wzrostem lub spadkiem ceny aktywa bazowego — takie spojrzenie jest typowe dla klienta detalicznego lub korporacyjnego — z punktu widzenia tzw. *market makers*[6] są one przede wszystkim ekspozycjami na zmienność, bo ryzyko zmian ceny instrumentu bazowego jest przez te instytucje z reguły domykane. Jeśli na przykład bank kupuje od klienta opcję call po ustalonej cenie, wyrażonej jako implikowana z opcji zmienność Σ i zabezpiecza ją krótką pozycją w akcjach S, których (spodziewana) faktycznie z r e a l i z o w a n a zmienność wynosi σ, wówczas — na mocy (1) — zysk banku można wyrazić następującym równaniem[7]:

$$\text{P\&L} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2\left(\sigma^2 - \Sigma^2\right)\Delta t \tag{3}$$

Widać zatem, że wycena rynkowa takiej „delta neutralnej" pozycji opcyjnej (czyli pozycji, w której wyrugowano komponent liniowy związany ze zmianami instrumentu bazowego) jest funkcją różnicy między przyszłą zrealizowaną zmiennością a zmiennością implikowaną, po której kupiono opcję. Inaczej mówiąc, zajmowanie pozycji w opcji bądź strategii opcyjnej jest równoznaczne z zajęciem pozycji w zmienności jako takiej. I choć przykład jest oczywiście uproszczony, to co do zasady obrazuje sposób, w jaki parametr zmienności wpływa jednocześnie na wycenę, ryzyko i wynik pozycji opcyjnych[8].

Niniejsze opracowanie zawiera przegląd metod pomiaru, modelowania i prognozowania zmienności. Ponieważ w literaturze dostępne są stosunkowo liczne prace przeglądowe uporządkowane według kryterium modelowego (por. np. wstępny rozdział [Bauwens, Hafner i Laurent, 2012], a w krajowej

---

[6] Są to instytucje finansowe, które organizują rynek przez dwustronne kwotowanie cen kontraktów opcyjnych.

[7] Ogólnie rzecz biorąc, wynika to z faktu, że po wyeliminowaniu liniowego elementu opcji przez krótką pozycję w instrumencie bazowym zostaje funkcja kwadratowa ΔS. Jeśli portfel składa się z długiej pozycji w opcji C i krótkiej pozycji w $(\partial C/\partial S)$ jednostkach S, wówczas P&L = $= d\left(C - \frac{\partial C}{\partial S}S\right) = dC - \frac{\partial C}{\partial S}dS + R\left(\frac{\partial C}{\partial S}S - C\right)dt$. Oznaczając $\Gamma = \partial^2 C/\partial S^2$ oraz $\Theta = \partial C/\partial t$ można napisać P&L = $\frac{1}{2}\Gamma\Delta S^2\Delta t + \Theta\Delta t\Delta t + r(\Delta S - C)\Delta t$. Podstawiając z (1), P&L = $\frac{1}{2}\Gamma\Delta S^2\Delta t - \frac{1}{2}\Gamma\Sigma^2 S^2\Delta t$. Ponieważ σ oznacza faktycznie zrealizowaną zmienność S (którego — zgodnie z klasycznym założeniem — ewolucja w czasie jest dana uogólnionym procesem Wienera), to $\Delta S^2 \sim \sigma^2 S Dt$. Ostatecznie więc P&L = $= \frac{1}{2}\Gamma S^2\left(\sigma^2 - \Sigma^2\right)\Delta t$.

[8] Ekspozycję na zmienność można uzyskać nie tylko przez opisany wyżej *hedging* dynamiczny, lecz także statyczny, polegający na jednoczesnym zakupie opcji put i calI na ten sam instrument bazowy (tzw. „straddle").

literaturze szczególnie [Doman i Doman, 2009]), w artykule zdecydowano się na swoistą „ekonomizację" narracji. Zamiast przedstawienia kompilacji licznych dostępnych wyników w dalszej części podjęto raczej próbę pewnej ich syntezy z punktu widzenia wyceny opcji w duchu powyższego przykładu. I tak sekcja 2. wraca do prowokacyjnego spostrzeżenia Goldsteina i Taleba, zestawiając główne estymatory zmienności i dyskutując ich względne wady i zalety. Gdy wiadomo już, jak zmierzyć zmienność, pozostaje pytanie o jej prognozę na przyszłość, którą można by wykorzystać we wzorze (3). Główne wyniki w tym zakresie przedstawiono w sekcji 3. Literatura dotycząca prognozowania zmienności nie mówi jednak na ogół wiele o tym, jak uzyskane oszacowania zastosować w praktyce do skonstruowania zabezpieczonej pozycji opcyjnej [Carr i Madan, 2002], a w związku z tym jak poprawnie wyceniać opcje, szczególnie, że równania (1)–(3) wyprowadzono przy założeniu, że zmienność jest stała, a prognozowanie jej przyszłej wartości jest sprzeczne z tym założeniem. Zagadnienia te są omówione szerzej w sekcji 4., gdzie przedstawiono dwa różne podejścia do wyceny opcji — modele zmienności lokalnej i stochastycznej — umożliwiające nie tyle prognozę zmienności, co przede wszystkim spójną wycenę opcji uwzględniająca kwotowania rynkowe.

2. Pomiar zmienności

Wbrew kontrowersyjnej tezie Goldsteina i Taleba, przywołanej we wstępie, pojęcie zmienności ma dość naturalną interpretację statystyczną jako pierwiastek z wariancji (a czasem samą wariancję) lub inaczej: odchylenie standardowe [Poon, 2005]. Popularność takiego ujęcia wynika zapewne z praktyki myślenia o zmiennych finansowych — cenach lub stopach zwrotu — w kategorii procesów stochastycznych i zmiennych losowych. Jeśli stopa zwrotu[9] x_i jest zmienną losową, to charakteryzuje ją rozkład statystyczny, a więc takie parametry jak wartość oczekiwana i stopień rozproszenia wokół niej (oba mogą być rzecz jasna nieznane). Wariancja dana jest następującym wzorem:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}_i\right)^2 \tag{4}$$

gdzie $\overline{x}$ jest średnią z próby liczącej N elementów. Naturalnym podejściem wydaje się szacowanie (4) w oparciu o dzienne stopy zwrotu, tj. np. ceny z zamknięcia giełdy w danym dniu (stąd często używana nazwa estymatora *close-close*). Wówczas jednak otrzymany wynik trzeba zannualizować mnożąc przez liczbę dni roboczych w roku, czyli w Polsce 250. W tej procedurze ukryte są dwa założenia: (i) że dzienne stopy zwrotu są niezależne i pochodzą z identycznego rozkładu o skończonej wariancji; oraz (ii) że czas na użytek obliczeń

[9] O ile nie zaznaczono inaczej, tu i poniżej stopa zwrotu oznacza zawsze logarytmiczną stopę zwrotu z danego aktywa S, tj. $x_{i+1} = \ln(S_{i+1}) - \ln(S_i)$. Na temat wykorzystania logarytmicznych stóp zwrotu por. np. Hudson [2010].

może być mierzony w dniach handlowych, a nie kalendarzowych. Pierwsze założenie nie znajduje wprawdzie potwierdzenia w danych empirycznych [Engle, 1982], ale jego powszechną akceptację — także przez nadzorców[10] — można tłumaczyć brakiem przystępnych i zarazem wiarygodnych alternatyw [Danielsson i Zigrand, 2006]. Drugie założenie może się na pierwszy rzut oka wydać nieintuicyjne — szczególnie, jeśli przyjąć, że katalizatorem zmienności jest napływ nowych informacji w czasie rzeczywistym — jednak okazuje się, że wariancja stóp zwrotu np. z piątku na poniedziałek nie jest wcale proporcjonalnie większa niż ta z czwartku na piątek [French, 1980; French i Roll, 1986], a zatem zmienność jest w dużej mierze determinowana aktywnością handlową i tak powinna być skalowana. W obliczaniu (4) zakłada się też, że wykorzystywany szereg cen (stóp zwrotów) został oczyszczony z wpływu wypłaty dywidendy oraz innych czynników, jak np. prawa poboru, podziały lub konsolidacje akcji, które mogą zaburzać wycenę z powodów nieekonomicznych. Nieskorygowanie cen może prowadzić do istotnych błędów pomiaru. Na przykład 12 lipca 2012 r. cena spółki KGHM spadła ze 144,90 zł do 117,00 zł na zamknięciu dnia poprzedniego (tj. o 18,75%), co odzwierciedlało wypłatę dywidendy. Gdyby szereg danych nie został oczyszczony, 30-dniowa zmienność cen akcji spółki wyniosłaby 66% zamiast rzeczywistych 33%, po skorygowaniu o dywidendę.

Wzór (4) jest oczywiście szczególnie ciekawy nie dlatego, że mówi coś o danych z próby, ale ponieważ, przy pewnych dodatkowych założeniach, pozwala wnioskować o parametrach — a więc i kształcie — rozkładu stóp zwrotu. Na użytek estymacji przyjmuje się często, że $\overline{x} = 0$ (por. np. [Black, 1976a]), co wynika z faktu, że niepewność wokół oszacowania wartości oczekiwanej maleje znacznie wolniej ze zwiększeniem próby niż niepewność wokół oszacowania wariancji [pewna ambiwalencja wobec szacowania trendu stóp zwrotu wynika także z tego, że nie jest on wykorzystywany we wzorach na wycenę opcji (2)]. W takim wypadku s^2 jest nieobciążonym estymatorem wariancji, tj. $\mathbb{E}(s^2) = \sigma^2$ (gdyby na średnią nie zostało narzucone ograniczenie, to mianownik w (4) powinien być równy $N-1$, bo informacja zawarta w jednej obserwacji zostaje już wykorzystana do estymacji $\overline{x}$, por. np. [Figlewski, 1997]). W większości zastosowań interesująca jest przede wszystkim znajomość odchylenia standardowego — jest ono wyrażone w tych samych jednostkach co średnia (np. zł, a nie zł^2) i jego estymator wykazuje większą stabilność. Jednak ze względu na wypukłość funkcji pierwiastek ze średniej jest większy niż średnia z pierwiastków, tj. $\mathbb{E}\left(\sqrt{s^2}\right) < \sqrt{\mathbb{E}\left(s^2\right)}$, a zatem estymator odchylenia standardowego będzie obciążony.

[10] Np. Uchwała Nr 324/2011 KNF z 20 grudnia 2011 r. stwierdza: „bank może wykorzystać miary wartości zagrożonej obliczone zgodnie z krótszymi okresami utrzymywania pozycji skalowanymi do 10 dni, na przykład przez pierwiastek kwadratowy czasu".

Z obciążeniem tym można sobie poradzić w dwojaki sposób. Pierwsza, praktyczna metoda polega na przyjęciu, że $x_i \sim N(0, \sigma^2)$[11] i rozpatrzeniu średniej wartości bezwzględnych stóp zwrotu, której nieobciążonym estymatorem jest oczywiście $\frac{1}{N}\sum_i |x_i|$. Ponieważ wartość oczekiwana modułu zmiennej losowej o rozkładzie normalnym wynosi $\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, to estymator odchylenia standardowego stóp zwrotu (w ujęciu zannualizowanym) można wyrazić przez:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{250\pi}{2}}\frac{1}{N}\sum_i |x_i| \approx 19{,}9\mathbb{E}(|x_i|) \tag{5}$$

Warto zauważyć, że równanie (5) definiuje prostą regułę kciuka: nieobserwowalna zmienność stóp zwrotu powinna być w przybliżeniu równa 20-krotności średniej dziennej stopy zwrotu, co do której uczestnicy rynku mają z reguły dużo lepsze wyczucie intuicyjne.

Druga, bardziej formalna metoda korekty obciążenia także opiera się na założeniu normalności. Przyjmując, że $x_i \sim N(0, \sigma^2)$, można wyrazić funkcję gęstości odchylenia standardowego z próby jako funkcję analizowanego szeregu czasowego:

$$\phi_N(s) = 2\frac{\left(\frac{N}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}(N-1)}}{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}\exp\left(\frac{-Ns^2}{2\sigma^2}\right)s^{N-2} \tag{6}$$

gdzie Γ jest funkcją gamma zdefiniowaną jako $\Gamma(n) = (n-1)!$. Im większe N, tym bardziej wartość oczekiwana s zbliża się do σ i tym mniejsze obciążenie estymatora. Okazuje się, że obciążenie s można wyrazić analitycznie:

$$s = \theta(N)\sigma = \sqrt{\frac{2}{N}\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}}\sigma \tag{7}$$

Stąd $\frac{s}{\theta(N)}$ jest nieobciążonym estymatorem σ. Chociaż $\frac{s}{\theta(N)}$ nie będzie systematycznie zawyżał ani zaniżał σ, to zbieżność do wartości oczekiwanej postępuje wolno, co oznacza, że estymator jest nieefektywny. Wariancja oszacowania zmienności z próby wynosi

[11] Przyjęcie założenia o normalności (log-normalności) stóp zwrotu jest z reguły motywowane na gruncie teoretycznym zastosowaniem Centralnego Twierdzenia Granicznego, w którym dzienne stopy zwrotu traktowane są jako sumy niezależnych ruchów cen o dużo wyższej częstotliwości [Rebonato, 2007].

$$\mathrm{var}(s) = \frac{1}{N}\left(N - 1 - 2\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}\right)\sigma^2 \approx \frac{\sigma^2}{2N} \tag{8}$$

Widać zatem, że oszacowanie zmienności jest tym lepsze — błąd standardowy tym mniejszy — im większa jest liczba elementów wykorzystanych do estymacji.

Dalszy rozwój metod pomiaru zmienności może więc polegać albo na poszukiwaniu coraz efektywniejszych estymatorów, być może wykorzystujących inne dane niż tylko te z zamknięcia sesji, albo na wykorzystaniu coraz dłuższych szeregów czasowych. Drugie podejście może się z pozoru wydawać bardziej zachęcające, wiąże się ono jednak z pewnym dylematem. Otóż do tej pory zmienność była traktowana jako zmienna nieobserwowalna, ale jednak stała. Jeśli zmienność fluktuuje w czasie, uwzględnienie w estymacji zbyt długich szeregów czasowych może zaburzyć oszacowanie, bo wykorzystane dane będą dotyczyć w istocie procesów o innych parametrach. Z kolei zbyt krótkie szeregi czasowe mogą oznaczać zbyt duży błąd pomiaru [w myśl (8)]. Rozsądnym wyjściem z sytuacji jest więc rozważenie danych o wyższej niż dzienna częstotliwości, co jednak wiąże się z odrębnymi problemami. W dalszej części niniejszego rozdziału omówiono nieco bardziej szczegółowo oba podejścia — poszukiwanie efektywniejszego estymatora i wykorzystanie danych o wysokiej częstotliwości — zwracając uwagę na ich względne wady i zalety.

2.1. Alternatywne estymatory zmienności

Wilmott [2006] wymienia trzy alternatywne estymatory zmienności — Parkinsona, Garmana i Klassa oraz Rogersa i Satchella — zwane także estymatorami zrealizowanego zakresu zmian[12]. Pierwszy z nich [Parkinson, 1980a] opiera się na wykorzystaniu ekstremów cen z danego dnia:

$$\hat{\sigma}_P^2 = \frac{1}{4\ln(2)}\sum_{i=1}^{N}\left(\ln\frac{h_i}{l_i}\right) \tag{9}$$

gdzie h_i oraz l_i oznaczają odpowiednio cenę maksymalną i minimalną w dniu i, czy — bardziej precyzyjnie — w ustalonej jednostce czasu. Intuicyjnie wydaje się, że (9) powinien być dobrym estymatorem σ. Po pierwsze, im większe jest odchylenie standardowe stóp zwrotu, tym większe wartości powinno przyjmować wyrażenie $\ln\left(\frac{h_i}{l_i}\right)$; i odwrotnie — małe wartości $\ln\left(\frac{h_i}{l_i}\right)$ powinny wskazywać na małe σ. Po drugie, wykorzystanie dwóch cen z danego dnia

[12] Dla wygody zostaną zaprezentowane estymatory wariancji; można je przekształcić do nieobciążonych estymatorów odchyleń standardowych, posługując się analogiczną metodą, jak powyżej.

(maksymalnej i minimalnej) — a nie tylko jednej, jak w estymatorze *close-close* — poszerza zakres wykorzystanych informacji i powinno poprawiać jakość estymacji. I rzeczywiście, jak pokazuje Parkinson, wariancja (9) wynosi $\mathrm{var}\left(\hat{\sigma}_P^2\right) = \frac{0{,}41\sigma^4}{N_P}$. Z kolei wariancja s^2, przy założeniu $\bar{x} = 0$, wynosi $\frac{2\sigma^4}{N}$[13]. Stąd, aby osiągnąć ten sam rząd dokładności estymatorów w obu metodach, powinno się wykorzystać $N \approx 5N_P$, tj. pięciokrotnie więcej obserwacji w estymacji z wykorzystaniem tradycyjnej formuły.

Wadą estymatora Parkinsona może być to, że — wykorzystując jedynie informacje o cenach maksymalnych i minimalnych — pomija ich związek z cenami zamknięcia danego dnia. Tymczasem, jak argumentują Garman i Klass [1980], uwzględnienie tego związku powinno jeszcze bardziej poprawić jakość estymacji. Stąd zaproponowany przez Garmana i Klassa estymator ma postać:

Tabela 1.

Wartości oczekiwane estymatorów zmienności (prawdziwa wariancja = 1,0)

Liczba transakcji	Estymator Parkinsona $\hat{\sigma}_P^2$	Estymator Garmana-Klassa $\hat{\sigma}_{GK}^2$
5	0,55	0,38
10	0,65	0,51
20	0,74	0,64
50	0,82	0,73
100	0,86	0,80
200	0,89	0,85
500	0,92	0,89

Źródło: Garman i Klass [1980].

$$\hat{\sigma}_{GK}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{h_i}{l_i}\right)^2 - (2\ln 2 - 1)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{c_i}{c_{i-1}}\right)^2 \quad (10)$$

gdzie c_i jest ceną zamknięcia z dnia i. Jak widać (10) jest średnią ważoną estymatorów (4) i (9). Wagi dobrano w taki sposób, aby zminimalizować wariancję. Okazuje się, że estymator Garmana-Klassa jest siedmiokrotnie bardziej efektywny (tj. ma siedmiokrotnie mniejszą wariancję) niż (4), a — dzięki uwzględnieniu informacji o cenach zamknięcia — także o 50% efektywniejszy niż estymator Parkinsona. Oba jednak, $\hat{\sigma}_{GK}^2$ oraz $\hat{\sigma}_P^2$, zostały wyprowadzone przy założeniu, że proces generujący ceny ma charakter ciągły lub — bardziej formalnie — że stopy zwrotu można opisać standardowym ruchem Browna, tj.

[13] Lehmann i Casella [1998, s. 92], pokazują, że $(n-1)s^2/\sigma^2$ ma rozkład χ^2_{n-1}. Ponieważ rozkład χ^2 z $(n-1)$ stopniami swobody ma wariancję $2(n-1)$ [*ibid.*, s. 31], to $\mathrm{var}(s^2) = 2\sigma^4/(n-1)$. Przy znanej średniej liczba stopni swobody wynosi N, jak powyżej.

$x_t = \sigma\varepsilon_t\sqrt{t}$, gdzie $\varepsilon_t \sim IID(0, 1)$. Jeśli transakcje zachodzą w dyskretnych odstępach czasu — tak jak to ma miejsce w rzeczywistości — to „prawdziwe" nieobserwowalne ceny mogą nie zdążyć osiągnąć swoich maksimów/minimów. Tym samym obserwowane wartości h_i oraz l_i będą co do wartości bezwzględnej mniejsze niż faktycznie, przez co wyliczone statystyki będą obciążone. Co ciekawe, jak wynika z tabeli 1., obciążenie estymatora Garmana-Klassa jest nawet większe niż estymatora Parkinsona (aby otrzymać wartości nieobciążone, należy podzielić oszacowane statystyki przez wartości obciążeń podane w tabeli).

Stosunkowo największą odporność na dyskretny sposób próbkowania cen wykazuje klasyczny estymator (4) z $\overline{x} = 0$, którego wartości oczekiwane w symulacji Garmana i Klassa [1980] odbiegają od prawdziwej wariancji najwyżej o 0,01–0,03. Tu jednak pojawia się inny problem — założenie zerowego trendu w procesie stóp zwrotu było poczynione z powodów raczej pragmatycznych i nie musi wcale być prawdziwe; jeśli natomiast stopy zwrotu mają w rzeczywistości niezerowy trend, to estymator (4) będzie oczywiście obciążony [podobnie zresztą jak (9) i (10)]. Dlatego Rogers i Satchell [1991a] proponują następującą modyfikację podejścia Garmana-Klassa (por. także [Rogers, Satchell i Yoon, 1994]):

$$\hat{\sigma}^2_{RS} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\ln\frac{h_i}{o_i}\left(\ln\frac{h_i}{o_i} - \ln\frac{c_i}{o_i}\right) + \ln\frac{l_i}{o_i}\left(\ln\frac{l_i}{o_i} - \ln\frac{c_i}{o_i}\right)\right] \tag{11}$$

gdzie o_i jest ceną otwarcia z dnia i. Okazuje się, że $\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2_{RS}) = \sigma^2 t$, także wtedy, gdy x_t ma niezerowy trend. Jednocześnie estymator (11) wypada też wyraźnie lepiej niż (10) w badaniu symulacyjnym: 95-procentowy przedział ufności wokół $\hat{\sigma}^2_{RS}$ zawierał prawdziwy parametr σ^2 aż w 15 spośród 16 rozważonych specyfikacji. Z kolei $\hat{\sigma}^2_{GK}$ poradził sobie w 3 z 4 specyfikacji, w których oczekiwana stopa zwrotu była równa 0, lecz nie poradził sobie zupełnie w pozostałych, tj. 95-procentowy przedział ufności nie zawierał prawdziwej wariancji.

Uwzględnienie w estymacji trendu pozbawia $\hat{\sigma}^2_{RS}$ istotnego obciążenia — tym większego, im większa jest relacja μ/σ i im mniejsza częstotliwość wykorzystywanych danych. Jednak (11) ma wciąż jeden mankament, którego nie miał podstawowy estymator wariancji — zaniża zmienność w sytuacjach, gdy ceny akcji wykazują skokowe zmiany w chwili otwarcia. Rynki na większość aktywów są okresowe zamykane — na noc, dni wolne od pracy lub święta — i informacje napływające w tym czasie „przerwy" mogą się przyczynić do gwałtownego odchylenia cen otwarcia od poziomów zamknięcia z poprzedniego dnia roboczego, co powinno być uwzględnione w estymacji. Tymczasem zarówno Parkinson [1980b] jak Rogers i Satchell [199lb] zakładają, że cena otwarcia w dniu i jest równa cenie zamknięcia w dniu $i - 1$, a więc *de facto* że rynek jest otwarty nieprzerwanie, co oczywiście będzie zaniżać oszacowanie zmienności. Od wady tej jest za to wolny estymator zaproponowany stosunkowo niedawno w pracy [Yang i Zhang, 2000]:

$$\sigma^2_{YZ} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\ln\frac{o_i}{c_i-1} - \overline{\ln\frac{o_i}{c_i-1}}\right)^2 + \frac{k}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\ln\frac{c_i}{o_i} - \overline{\ln\frac{c_i}{o_i}}\right)^2 + (1-k)\hat{\sigma}^2_{RS} \quad (12)$$

gdzie $k = \frac{0{,}34}{1{,}34 + (N+1)/(N-1)}$ stała jest dobierana w taki sposób, żeby zminimalizować wariancję oszacowania. Estymator $\hat{\sigma}^2_{YZ}$ jest nieobciążony (przy założeniu ciągłości), niezależny od trendu μ i uwzględnia skoki cen na otwarciu. Yang i Zhang [2000] pokazują ponadto, że $\hat{\sigma}^2_{YZ}$ ma ponad siedmiokrotnie mniejszą wariancję niż (4) i tylko ok. 8% większą niż (10) przy braku trendu w danych ($\hat{\sigma}^2_{GK}$ w takich sytuacjach jest najefektywniejszy). Z drugiej strony, w przypadku procesu cenowego, w którym zmienność jest zdominowana przez skoki cenowe na otwarciu, efektywność $\hat{\sigma}^2_{YZ}$ będzie niemal równa efektywności klasycznego estymatora wariancji (4). Choć różnice te są niewątpliwie istotne, trzeba pamiętać, że zostały oszacowane w oparciu o dane pochodzące z symulacji stochastycznych. Porównanie z wykorzystaniem danych empirycznych, które przeprowadzili np. Brandt i Kinlay [2005], pokazuje, że wszystkie estymatory zrealizowanego zakresu zmian dają podobne wyniki i są ze sobą bardzo silnie skorelowane. Od całej grupy wyraźnie natomiast odstaje estymator (4), który wypada gorzej według wszystkich zastosowanych przez autorów kryteriów. Do podobnych wniosków dochodzą Ślepaczuk i Zakrzewski [2008], którzy podkreślają dodatkowo, że w praktyce — gdy stopy zwrotu nie mają charakteru ciągłego i prawdziwa zmienność nie jest znana — istotniejszy od samego estymatora jest wybór okna czasowego wykorzystywanego do estymacji.

2.2. Dane wysokiej częstotliwości

Zgodnie z podstawową zasadą statystyki — wyrażoną zresztą *implicite* we wzorze (8) — zwiększenie liczby niezależnych obserwacji w próbie zwiększa liczbę stopni swobody i poprawia wiarygodność estymatora. Można na przykład łatwo obliczyć, że wykorzystanie danych o dziennych stopach zwrotu za ostatnie 10 lat (tj. 10 × 250 obserwacji) pozwala ograniczyć niepewność wokół oszacowania zmienności do ok. 1,4%, co przy prawdziwej zmienności na poziomie 25% oznacza błąd zaledwie 0,4%. Tu jednak pojawia się inny problem. Dotychczasowe rozważania opierały się na założeniu, że zmienność jest stała, co być może stanowi dopuszczalne przybliżenie w bardzo krótkim okresie, ale jest raczej nie do obrony w dłuższym czasie. Wydaje się niekontrowersyjne, że w ciągu 10 lat charakterystyka procesu cenowego mogła się znacząco zmienić, co z kolei oznaczałoby, że część wykorzystanych danych była realizacją zupełnie innej zmiennej losowej (w szczególności tzw. efekt dźwigni wskazuje, że zmienność jest ujemnie skorelowana z ceną instrumentu bazowego, por. np. [Nandi, 1998]). Okazuje się jednak, że zamiast iść „dalej" w czasie, można równie dobrze iść „głębiej" — sięgając po dane wysokiej częstotliwości ze znacznie krótszego okresu. Jak zauważają Dacorogna, Gençay, Müller, Pictet i Olsen [2001], liczba dostępnych obecnie obserwacji z jednego tylko dnia na płynnym rynku jest równa liczbie obserwacji dziennych za okres 30 lat. Wykorzystanie danych wysokiej częstotliwości miałoby tę dodatkową zaletę, że zaprezentowane dotychczas estymatory (9)–(12) nie są wrażliwe na zmienność intraday — można sobie bowiem wyobrazić dwie hipotetyczne ścieżki ewolucji cen, z identycznymi cenami otwarcia/zamknięcia oraz min/max i zarazem różną zmiennością śróddzienną, która z kolei może być istotna w wielu praktycznych zastosowaniach, np. aktywnym zarządzaniu portfelem opcyjnym. Wreszcie wysoka częstotliwość danych pozwala lepiej aproksymować teoretyczny ciągły model procesu cenowego. Rzeczywiście, Andersen i Bollerslev [1998] pokazują, że nieobserwowalna wariancja ciągłego procesu cenowego może być dobrze przybliżona sumą kwadratów śróddziennych stóp zwrotu, jeśli tylko częstotliwość danych jest wystarczająco wysoka (i nie występuje autokorelacja). Fung i Hsieh [1991] nazywają taki estymator „zmiennością zrealizowaną".

Niestety, jak zauważył już Black [1986], obserwowane ceny transakcyjne odzwierciedlają nie tylko prawdziwą wartość „równowagową", ale także szum wynikający z mikrostruktury rynku (np. wolumenu realizowanej transakcji, pory dnia jej wykonywania, spreadu bid-ask itp.)[14]. W istocie — im mniejsza jednostka czasu, tym większy jest udział szumu spowodowanego mikrostrukturą rynku i zarazem mniejszy udział rzeczywistego sygnału cenowego w obserwowanej cenie transakcyjnej. Dzieje się tak dlatego, że informacja o zmienności zawarta w stopie zwrotu jest proporcjonalna do upływu czasu pomiędzy obiema cenami, a poziom szumu mikrostrukturalnego w każdej z tych cen jest stały. A zatem, im dłuższy upływ czasu, tym korzystniejszy stosunek sygnału do szumu w obserwowanych cenach [Ait-Sahalia, Mykland i Zhang, 2005; Ait-Sahalia i Mykland, 2009]. Z drugiej strony, wykorzystanie danych wysokiej częstotliwości może — oprócz szumu — ujawnić jakościowo nowe elementy struktury stochastycznej, jak np. śróddzienną sezonowość zmienności. Lequeux [1999] pokazuje na przykład, że zmienność na rynku walutowym, obligacji i akcji zachowuje się bardzo podobnie — osiąga maksimum na otwarciu, maleje w ciągu dnia, by wzrosnąć ponownie pod koniec sesji. Praktyczne znaczenie sezonowości śróddziennej wydaje się jednak raczej ograniczone. Przy zarządzaniu pozycją opcyjną w dłuższym horyzoncie efekty sezonowości w ciągu dnia ulegną uśrednieniu, w perspektywie krótkookresowej zaś górę weźmie prawdopodobnie efekt ścieżki ewolucji instrumentu bazowego [Sinclair, 2008].

[14] Nb. Black [1986] uważał, że to właśnie dzięki szumowi informacyjnemu możliwy jest płynny rynek finansowy, nawet jeśli rynek ten jest w konsekwencji mniej efektywny. Omówienie zagadnień związanych z mikrostrukturą rynku i wykorzystanie danych wysokiej częstotliwości zawiera np. [Lequeux, 1999; Dacorogna, Gençay, Müller, Pictet i Olsen, 2001 oraz Hautsch, 2011].

Jaką częstotliwość danych należy wobec tego wykorzystywać, aby uzyskać najlepszej jakości estymator? W literaturze spotyka się różne podejścia. Na przykład Andersen, Bollerslev, Diebold i Ebens [2001], Barndorff-Nielsen i Shephard [2002] oraz Gençay, Ballocchi, Dacorogna, Olsen i Pictet [2002] wykorzystują dane 5-minutowe. Sinclair [2008] wskazuje, że właściwa częstotliwość zależy od produktu i rynku, ale z reguły lokuje się w przedziale 15–30 minut. Z kolei Andersen, Bollerslev, Diebold i Labys [2003] uważają, że dane 30-minutowe stanowią rozsądny kompromis pomiędzy obfitością danych a intensywnością frykcji rynkowych. Ait-Sahalia, Mykland i Zhang [2005] pokazują formalnie, że jeśli w danych występuje szum, którego nie uwzględnia się bezpośrednio w metodzie estymacji, wówczas optymalna częstotliwość danych jest skończona i zależy od parametrów szumu oraz długości analizowanej próby. I tak na przykład w przypadku rynku akcji — gdzie zmienność indukowana mikrostrukturą rynku wnosi ok. 60% do całkowitej wariancji śróddziennych stóp zwrotu — optymalna częstotliwość wynosi 32 minuty oraz 3,3 godziny odpowiednio dla próby obejmującej 1 dzień i 1 rok. Jeśli natomiast szum zostanie uwzględniony *explicite* przez odpowiednią korektę specyfikacji modelu, wówczas — zgodnie z elementarną intuicją — optymalne staje się wykorzystanie wszystkich dostępnych danych, z dowolną częstotliwością (Ait-Sahalia, Mykland i Zhang, 2005]. Metoda uwzględniania szumu w estymacji zmienności metodą największej wiarygodności jest jednak na tyle skomplikowana, że trudno sobie wyobrazić jej większe upowszechnienie. Znacznie prostsze w implementacji podejście Andersena i Bollersleva [1998] jest natomiast bardzo wrażliwe na efekty mikrostruktury rynku, co próbowali później skorygować Zhang, Mykland i Ait-Sahalia [2005] oraz Hansen i Lunde [2006]. Wreszcie Martens i van Dijk [2007], wzorując się na podejściu Parkinsona [1980b], zaproponowali zastąpienie kwadratów śróddziennych stóp zwrotu różnicami między ceną maksymalną i minimalną w danym oknie czasowym, co istotnie poprawia efektywność estymacji zmienności.

Oczywiście całkowitą odporność na szum w danych śróddziennych wykazują — ze względu na swą konstrukcję — estymatory opisane w sekcji 2.1. [Alizadeh, Brandt i Diebold, 2002]. Shu i Zhang [2006] porównują więc obie metody estymacji — tj. estymatory zrealizowanego zakresu zmian oraz zmienności zrealizowanej — wykorzystując symulacje Monte Carlo oraz dane empiryczne wysokiej częstotliwości z giełdy amerykańskiej. W przypadku symulacji „prawdziwych'' cen, tj. cen pozbawionych spreadu bid-ask, zmienność zrealizowana okazuje się przybliżać prawdziwą wariancję z dokładnością 0,01%, wobec obciążenia 6%–9% dla estymatorów (9)–(12). Ponadto względna efektywność zmienności zrealizowanej — mierzona relacją jej wariancji do wariancji estymatora Parkinsona — wynosi na „prawdziwych'' cenach ponad 80, natomiast w przypadku pozostałych estymatorów zrealizowanego zakresu zmian zaledwie 1,4–1,8. Różnice zacierają się jednak, gdy symulowane dane zawierają spread bid-ask. W tym wypadku względna efektywność zmienności zrealizowanej zmniejsza się do 3,2, przy wzroście obciążenia do 6,8%, miary efektywności zaś dla pozostałych estymatorów — niewrażliwych na efekty mikrostruktury rynku — pozostają na niezmienionych poziomach. Analiza własności estymatorów na danych empirycznych jest utrudniona, ponieważ prawdziwa zmienność jest nieobserwowalna, a — co za tym idzie — brakuje naturalnego wzorca, do którego można by odnosić uzyskane wyniki w celu oszacowania obciążenia. Shu i Zhang [2006] przyjmują, że miarą „prawdziwej" zmienności indeksu S&P 500 jest zmienność zrealizowana obliczona jako suma kwadratów 15-minutowych stóp zwrotu (akurat w tym oknie czasowym ustabilizowały się wartości zmienności zrealizowanej). W tym wypadku najlepszy okazuje się estymator (10), który ma nie tylko najmniejsze obciążenie (1,05%), ale jednocześnie najmniejszą wariancję.

2.3. Podsumowanie

Wniosek, jaki się wyłania z tego — z konieczności zwięzłego — przeglądu literatury, może się wydać nieco rozczarowujący. Chociaż struktura prezentacji sugerowała, że każdy kolejny estymator był zaprojektowany w taki sposób, aby naprawić jakieś mankament poprzedniego — i rzeczywiście w pewnym stopniu tak właśnie było — to przegląd nie kończy się wskazaniem jednej metody pomiaru zmienności, która by bezwzględnie górowała nad innymi. Nie jest jednak tak, że przedstawione wyniki badań są *en gros* niekonkluzywne. Po pierwsze, własności estymatorów zależą od charakteru danych, ich częstotliwości, stosunku sygnału do szumu itp. Po drugie, najbardziej powszechny, klasyczny estymator wariancji (4), obliczony z wykorzystaniem danych dziennych, jest miarą niedokładną i mało efektywną w sensie statystycznym. Po trzecie, tę nieefektywność można w dużym stopniu wyeliminować, uwzględniając dane śróddzienne wysokiej częstotliwości. Po czwarte, zrealizowana wariancja jest bardzo efektywnym estymatorem zmienności, szczególnie w przypadku danych teoretycznych, gdy znana jest prawdziwa wartość zmienności. Na rzeczywistych danych empirycznych dobrze wypadają także estymatory zrealizowanego zakresu zmian, które wymagają z reguły mniejszej ilości informacji, aby osiągnąć porównywalną efektywność. Wreszcie przydatne może się okazać także porównanie wskazań różnych estymatorów. Jeśli na przykład estymatory Parkinsona i Garmana-Klassa wskazują na zmienność zbliżoną do 30%, a Rogersa-Satchella sugeruje wartość bliższą 20%, można domniemywać, że stopy zwrotu wykazują rosnący trend, którego nieuwzględnienie powoduje zawyżone oszacowanie $\hat{\sigma}_P^2$ i $\hat{\sigma}_{GK}^2$. Z kolei niska wartość klasycznego estymatora wariancji w porównaniu do estymatora Parkinsona może sugerować, że znaczna część zmienności jest generowana przez ruchy cen śróddziennych. Wszystkie te informacje mogą być pomocne przy określaniu procedury zabezpieczania pozycji opcyjnej.

3. Prognozowanie zmienności

W rozdziale 2. zaprezentowane główne metody pomiaru zmienności. Każda z miar wyrażała jednak zmienność historyczną, tj. już *de facto* zrealizowaną w danym okresie w przeszłości. Tymczasem z perspektywy wyceny opcji, a także zysku na zabezpieczonej pozycji (3), kluczowe jest przyszłe kształtowanie się zmienności instrumentu bazowego w okresie do zapadalności transakcji opcyjnej. Chociaż w oryginalnym podejściu BSM przyjmuje się założenie, że zmienność jest immanentną niezmienną własnością każdego instrumentu bazowego — co umożliwiło eleganckie analityczne wyprowadzenie wzorów (2)–(3) — nawet dla samych autorów było oczywiste, że jest to tylko przybliżenie, w dodatku niezbyt poprawne[15]. Istotnie, niedługo po opublikowaniu teorii BSM, zaczęto prowadzić badania nad kształtem i stabilnością rozkładów stóp zwrotu, a także ewolucją w czasie ich zmienności. Efektem tych badań jest pokaźna już dziś literatura, której najważniejsze wnioski — tzw. fakty stylizowane — można podsumować następująco [Cont, 2001; Poon, 2005]. Po pierwsze, stopy zwrotu nie wykazują autokorelacji, co ma ekonomiczną interpretację (słabej) efektywności rynku [Fama, 1970]. Po drugie, rozkłady stóp zwrotu mają grube ogony. Po trzecie, zmienność stóp zwrotu wykazuje tendencję do tworzenia skupisk (grupowania się). Intuicyjnie oznacza to, że dużym (małym) zmianom cen aktywów w danym dniu towarzyszą duże (małe) zmiany w dniu kolejnym, a formalnie, że wartości bezwzględne lub kwadraty stóp zwrotu w kolejnych okresach wykazują dodatnią i powoli wygasającą autokorelację. Po czwarte wreszcie, zmienność jest ujemnie skorelowana z poziomem stóp zwrotu, tj. zmienność rośnie, gdy ceny aktywów spadają (tzw. efekt dźwigni)[16]. Wszystkie powyższe obserwacje wskazują, że zmienność nie jest stała i że można podejmować próby prognozowania jej przyszłych fluktuacji. Poniżej przedstawiono właśnie przegląd najważniejszych metod i wyników w tym zakresie, wyróżniając metody oparte na analizie szeregów czasowych oraz na implikowaniu oczekiwań z cen rynkowych[17].

3.1. Metody szeregów czasowych

Pierwsza klasa metod opiera się na formułowaniu prognoz w oparciu o historyczne oszacowania zmienności. Jedna z najprostszych metod w tej grupie polega na założeniu, że proces ewolucji zmienności w czasie ma charakter błądzenia losowego, tj. $\sigma_t = \sigma_{t-1} + \varepsilon_t$, gdzie ε_t jest białym szumem. W takim ujęciu najlepszą prognozą przyszłej zmienności jest rzecz jasna dzisiejsza zmienność, obliczona jako odchylenie standardowe dziennych stóp zwrotu,

---

[15] Fischer Black miał kiedyś napisać: „Przypuśćmy, że użyjemy odchylenia standardowego… możliwych przyszłych stóp zwrotu z akcji… jako miary jej zmienności. Czy sensowne jest przyjęcie, że zmienność jest stała w czasie? Nie sądzę”, za: [Lewis, 2000].

[16] Por. także [Black, 1976b] oraz [Christie, 1982]. Kapitał firmy E może być postrzegany jako opcja na aktywa firmy V z ceną wykonania równą poziomowi zadłużenia D, przy czym $V = D + E$. Jeśli $dV = V\sigma dZ$, a poziom zadłużenia jest stabilny, wówczas $\frac{dE}{E} = \frac{dV}{E} = \frac{V\sigma dZ}{E} = \frac{(D+E)\sigma dZ}{E}$, stąd $\sigma_E = \sigma\left(1 + \frac{D}{E}\right)$. Zatem zmienność cen akcji rośnie, gdy cena akcji spada.

[17] Poniższa dyskusja opiera się w dużej mierze na pracy [Poon, 2005], która zawiera bardzo obszerny przegląd literatury przedmiotu.

lub — jeśli szereg czasowy jest zbyt krótki — jako zrealizowany zakres zmian śróddziennych. Prognoza zmienności może jednak być stworzona nie tylko w oparciu o jej ostatnią zaobserwowaną wartość, ale także o wszystkie dostępne wartości, jak w metodzie średniej historycznej, gdzie:

$$\sigma_{t+1} = \frac{1}{t}\left(\sigma_t + \sigma_{t+1} + \ldots + \sigma_1\right) \tag{13}$$

Wariantem średniej historycznej jest średnia krocząca, w której bierze się pod uwagę tylko τ ostatnich obserwacji (zamiast wszystkich dostępnych): $\sigma_{t+1} = \frac{1}{\tau}\left(\sigma_t + \sigma_{t-1} + \ldots + \sigma_{t-\tau}\right)$. Stosunkowo najbardziej wyrafinowanym podejściem w tej klasie jest metoda wykładniczo ważonej średniej ruchomej (*Exponentially Weighted Moving Average*, EWMA) opracowana przez zespół Riskmetrics Longerstaey [1996]. Punktem wyjścia jest definicja estymatora:

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}x_{t-i}^2 \tag{14}$$

gdzie $\lambda \in (0, 1)$ określa wagę przypisywaną stopom zwrotu x_t ze względu na ich oddalenie w czasie (zakłada się, jak wszędzie powyżej, że wartość oczekiwana stóp zwrotu wynosi zero). Zespół Riskmetrics proponował, by optymalną wartość parametru λ ustalać na podstawie minimalizacji błędu średniokwadratowego prognozy przeprowadzonej dla 480 szeregów czasowych różnych zmiennych finansowych (np. dla jednodniowej prognozy zmienności $\lambda = 0{,}94$, a miesięcznej $\lambda = 0{,}97$). Prognozowanie w oparciu o EWMA opiera się na rekursywnych własnościach estymatora (14), które z kolei mają odzwierciedlać obserwowaną empirycznie autokorelację kwadratów stóp zwrotów. Dysponując danymi o stopach zwrotu do chwili t, prognozę zmienności na dzień $t + 1$ można zapisać wzorem:

$$\begin{aligned}\sigma_{t+1|t}^2 &= (1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}x_{(t+1)-i}^2 = (1-\lambda)\left(x_t^2 + \lambda x_{(t-1)}^2 + \ldots\right) = \\ &= (1-\lambda)x_t^2 + \lambda(1-\lambda)\left(x_{t-1}^2 + \lambda x_{t-2}^2 + \ldots\right) = (1-\lambda)x_t^2 + \lambda\sigma_{t|t-1}^2\end{aligned} \tag{15}$$

Taylor [2004] zaproponował modyfikację EWMA, w której wagi zależą od wielkości i znaku stóp zwrotu (*Smooth Transition Exponential Smoothing*, STES):

$$\sigma_t = \alpha_{t-1}x_{t-1}^2 + (1-\alpha_{t-1})\sigma_{t-1}^2 \tag{16}$$

gdzie parametr wygładzający $\alpha_{t-1} = (1 + \exp(\beta + \gamma V_{t-1})^{-1} \in (0, 1)$ i dopasowuje się do zmian w V_{t-1}, które zależnie od wariantu modelu może być zdefiniowane jako $x_{t-1}, |x_{t-1}|$ lub funkcja obydwu.

Zamiast sztywno narzuconej wagi, która powoduje stopniowe wygasanie wpływu obserwacji odsuniętych daleko w czasie, można oczywiście oszacować zwykłe równanie autoregresyjne, w którym waga każdego opóźnienia ustali się metodą najmniejszych kwadratów:

$$\sigma_t = \alpha + \beta_1 \sigma_{t-1} + \ldots + \beta_n \sigma_{t-n} + \varepsilon_t \tag{17}$$

Wówczas prognoza na okres $t + 1$ jest oczywiście dana wzorem $\hat{\sigma}_{t+1} = \alpha + \beta_1\sigma_t + \ldots + \beta_n\sigma_{t-n}$. Prostą regresję można rozbudować przez uwzględnienie błędów, tak by $\hat{\sigma}_{t-1} = \alpha + \Sigma_i\beta_i\sigma_{t+1-i} + \Sigma_i\gamma_i\varepsilon_{t+1-i}$ (ARMA) lub wprowadzając różnicowanie, tj. stopień zintegrowania (ARIMA).

Chociaż, jak się okaże, metody zaproponowane powyżej wykazują w niektórych wypadkach zaskakująco dobre własności predykcyjne, to jednak pewien dyskomfort może budzić niespójność odzwierciedlona *implicite* w założeniu, że zmienność jest stała w pewnym oknie czasowym — np. w ciągu 30 dni potrzebnych do wyestymowania odchylenia standardowego — a zarazem zmienia się, gdy to okno przesunie się choćby o jeden dzień naprzód lub do tyłu. Aby w spójny sposób uchwycić fluktuacje zmienności stóp zwrotu w czasie, potrzebna jest bardziej fundamentalna teoria, którą 30 lat temu stworzył Engle [1982] z całkiem innym zamiarem — usiłując zweryfikować makroekonomiczny postulat Miltona Friedmana, że nieprzewidywalność przyszłej inflacji jest główną przyczyną cyklu koniunkturalnego. Okazało się jednak, że narzędzie, czy właściwie teoria, autoregresyjnej warunkowej heteroskedastyczności (ARCH), jak nazwał ją David Hendry, znakomicie nadawała się nie tylko do analizy uporczywości inflacji, lecz także — a może przede wszystkim — do modelowania zmienności stóp zwrotu instrumentów finansowych i odzwierciedlania ich najbardziej charakterystycznych właściwości, tj. grubych ogonów i tworzenia skupisk (*volatility clustering*). *Novum* podejścia Engle'a polegało na rozróżnieniu wariancji warunkowej od bezwarunkowej i pozwoleniu, aby ta pierwsza zmieniała się w czasie jako średnia ważona błędów prognozy (w której wagi szacuje się metodą największej wiarygodności), ta druga zaś była stała. Formalnie Engle [1982] postulował, aby proces stóp zwrotu x_t i ich wariancji opisać następującymi równaniami:

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sqrt{h_t z_t} \\ h_t &= \omega + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 \end{aligned} \tag{18}$$

gdzie z_t to biały szum, $\omega > 0$ oraz $\alpha_j \geq 0$, a wartość q dobiera się w taki sposób, by uchwycić obserwowaną empirycznie persystencję wariancji. Narzucając $\mu = 0$, otrzymuje się oczywiście $h_t = \sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j x_{t-j}^2$. Z (18) wynika, że h_t jest już znane w chwili t – 1, co natychmiast daje prognozę zmienności na jeden krok naprzód, a prognozę na kolejne okresy wyznacza się przy założeniu $\mathbb{E}\left(\sigma_{t+T}^2\right) = h_{t+T}$.

Bollerslev [1986] zaproponował bardzo popularne uogólnienie (18), nazywane GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), polegające na uwzględnieniu w równaniu wariancji warunkowej jej opóźnionych wartości[18]:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-1} + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 \tag{19}$$

Oczywiście jeśli $p = 0$, (19) redukuje się do ARCH(q), z kolei gdy $\omega = 0$, $p = q = 1$, a $\alpha = 1 - \lambda$ i $\beta = \lambda$, otrzymuje się EWMA zadaną równaniem (14). W przypadku szczególnie często spotykanej parametryzacji GARCH(1, 1) prognozy można wygenerować przez rekurencyjne podstawienia (wykorzystując fakt, że $\mathbb{E}\left(\varepsilon_{t+1}^2\right) = h_{t+1}$:

$$\begin{aligned} \hat{h}_{t+1} &= \omega + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 h_t \\ \hat{h}_{t+2} &= \omega + (\alpha_1 + \beta_1) h_{t+1} \\ &\dots \\ \hat{h}_{t+T} &= \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \beta_1} + (\alpha_1 + \beta_1)^T \left(\alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 h_t\right) \end{aligned} \tag{20}$$

Intuicyjna interpretacja metody prognozy jest następująca: zmienność w okresie t + 1 jest średnią ważoną zmienności długookresowej, zmienności prognozowanej w poprzednim okresie i nowych informacji, które się pojawiły od ostatniej prognozy. Znając parametry α_1, β_1, ω, można na podstawie powyższych równań bez trudu oszacować strukturę terminową zmienności. Jak widać, zmienności w kolejnych okresach zbiegają wykładniczo do długoterminowej średniej (wariancji bezwarunkowej), co jednak nie zawsze obserwuje się w danych rynkowych.

Od ukazania się przełomowych prac Engle'a [1982] i Bollersleva [1986] klasa metod prognozowania opartych na warunkowej wariancji znacznie się rozrosła. Na przykład Lunde i Hansen [2005] analizują własności prognostyczne 330 różnych modeli typu GARCH, przy czym — jak sami zaznaczają — nie jest to lista wyczerpująca. Do najważniejszych należą: EGARCH [Nelson, 1991], w którym równanie wariancji jest zapisane w postaci logarytmicznej, IGARCH [Engle i Bollerslev, 1986], w którym $\sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 1$ i wariancja bezwarunkowa nie jest określona, TGARCH oraz GJR-GARCH [Glosten, Jagannathan i Runkle, 1993], które pozwalają na asymetrię w traktowaniu

[18] W przypadku GARCH warunki nałożone α_j, β_i są nieco bardziej restrykcyjne, por. Nielson i Cao [1992].

ujemnych i dodatnich stóp zwrotu, AGARCH [Taylor, 1986; Schwert, 1989], w którym bezpośrednio uwzględnione jest warunkowe odchylenie standardowe zamiast wariancji, czy wreszcie CGARCH [Ding, Granger i Engle, 1993], który pozwala na uwzględnienie tzw. długiej pamięci w stopach zwrotu. W połowie lat 90. pojawiło się kilka prac poważnie kwestionujących przydatność i własności prognostyczne modeli GARCH, które — zdaniem autorów — dobrze sprawdzały się jedynie w próbie, a znacznie gorzej wypadały w testach *out-of-sample* [Jorion, 1995; Figlewski, 1997]. Andersen i Bollerslev [1998] pokazali jednak, że przyczyną rzekomych słabych wyników było stosowanie do oceny własności predykcyjnych modeli błędnego estymatora zmienności *ex post* (kwadratów stóp zwrotu zamiast skumulowanych kwadratów śróddziennych stóp zwrotu). Idąc tym tropem, Blair, Poon i Taylor [2001] oraz Engle [2002] jako jedni z pierwszych zmodyfikowali tradycyjną postać GARCH, uwzględniając zmienność zrealizowaną w równaniu wariancji warunkowej (jest to tzw. GARCH-X), a ostatnio Hansen, Huang i Shek [2011] zaproponowali spójny model łącznej ewolucji stóp zwrotu i zmienności zrealizowanej. Niewątpliwe bogactwo teoretyczne nie zawsze jednak znajduje uznanie praktyków. Na przykład Sinclair [2008], pisząc z perspektywy tradera, kontestuje przydatność metod GARCH w handlu opcjami i wytyka im dwa zasadnicze mankamenty: po pierwsze, wspomniane już powyżej trudności w skalibrowaniu struktury terminowej zmienności do danych rynkowych; po drugie, punktowy charakter prognoz. Z perspektywy pozycji opcyjnej, jak przekonuje, istotna jest nie tyle prognoza zmienności, co prognoza jej rozkładu[19].

3.2. Prognozy implikowane z cen opcji

Wszystkie wymienione dotychczas metody prognozowania zmienności polegały w jakimś zakresie na ekstrapolacji trendów, które dawało się zidentyfikować w historycznej ewolucji stóp zwrotu. Alternatywne podejście opiera się na wyekstrahowaniu zmienności instrumentu bazowego z rynkowych cen opcji, co powinno prowadzić do uzyskania prognoz opartych na bogatszym zbiorze informacji. Dla przypomnienia: cena europejskiej opcji call w podejściu BSM (równoważnie put — nie ma to znaczenia ze względu na parytet łączący obie transakcje) jest funkcją bieżącej ceny instrumentu bazowego, ceny wykonania (*strike*), zmienności instrumentu bazowego oraz stopy wolnej od ryzyka i terminu zapadalności transakcji (oznaczenia jak wyżej):

$$C(S,K,\sigma,r,T) = SN\left(\frac{\ln\frac{S}{K}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ee^{-rT}N\left(\frac{\ln\frac{S}{K}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \qquad (21)$$

[19] Ciekawą i praktyczną metodę, która wychodzi częściowo naprzeciw tym oczekiwaniom — tzw. stożki zmienności — zaproponowali Burghardt i Lane [1991].

Spośród pięciu parametrów, pierwszy (S) jest znany, a drugi i piąty (K, T) są parametrami transakcji. Wprawdzie wybór stopy wolnej od ryzyka może nie być całkiem trywialny, ale okazuje się, że cena opcji nie jest silnie wrażliwa na zmiany r. Jedyną więc niewiadomą w równaniu (21) jest σ. Jednocześnie można pokazać, że $\frac{\partial C}{\partial \sigma} > 0$, co oznacza, że znając cenę opcji w modelu BSM, można obliczyć implikowaną przez tę cenę zmienność instrumentu bazowego (tj. odchylenie standardowe stóp zwrotu). Zmienność implikowana jest definiowana jako wartość parametru σ, którą należy podstawić do równania (21), aby otrzymać obserwowaną na rynku, kwotowaną lub transakcyjną, cenę opcji (ponieważ $\sigma(C)$ nie daje się zapisać analitycznie, do obliczeń wykorzystywane są metody numeryczne, np. algorytm Newtona-Raphsona). Łatwość przechodzenia pomiędzy ceną opcji a jej zmiennością implikowaną z jednej strony, a standaryzacja rynku — z drugiej, sprawiły, że uczestnicy rynku na ogół kwotują ceny opcji za pośrednictwem ich zmienności implikowanych, podając dodatkowo jedynie wartości współczynnika *moneyness* (np. 25 delta call) i termin zapadalności. Nie musi to wcale oznaczać, że opcje są rzeczywiście wyceniane metodą BSM — zmienność implikowana jest po prostu metodą kwotowania transakcji, podobnie jak rentowność (*yield to maturity*) jest domyślną metodą kwotowania cen obligacji [Derman, Kamal, Kani, McClure, Pirasteh i Zou, 1998].

Ze względu na swój rynkowy charakter zmienność implikowana bywa interpretowana jako oczekiwana przez uczestników rynku zmienność instrumentu bazowego w horyzoncie do zapadalności transakcji. Ściśle biorąc, taka interpretacja nie jest jednak w pełni poprawna. Po pierwsze, rynek kwotuje różne zmienności implikowane dla opcji o różnych cenach i terminach wykonania (jest to tzw. uśmiech zmienności). Tymczasem w modelu BSM zmienność jest inherentną cechą instrumentu bazowego, a nie kontraktu opcyjnego. Gdyby więc przyjąć, że zmienność implikowana jest rzeczywiście przybliżeniem zmienności oczekiwanej przez uczestników rynku, wówczas nie ma *a priori* dobrego logicznego uzasadnienia dla wyboru konkretnej opcji (np. ze względu na współczynnik *moneyness*), z której należy implikować zmienność, a dla różnych cen wykonania, wyniki będą różne. Po drugie, jak zauważył Wilmott [2006], nie jest wcale oczywiste, że uczestnicy rynku są na tyle wyrafinowani statystycznie, by w ten sposób kwantyfikować swoje oczekiwania. Nie oznacza to rzecz jasna, że kwotowania zmienności implikowanej nie zawierają przydatnych informacji. Przeciwnie — jeśli uczestnicy rynku mają sprecyzowany pogląd na to, jaka będzie zmienność instrumentu bazowego, to ich przekonania znajdą odzwierciedlenie w kwotowanych poziomach zmienności implikowanej. Z drugiej jednak strony, jak wszystkie ceny zmienność implikowana jest podatna na mody, tendencje rynkowe i grę popytu i podaży. Stąd, aby wykorzystywać zmienność implikowaną jako estymator zmienności stóp zwrotu, należy zastosować kilka korekt.

Przede wszystkim, ze względu na uśmiech zmienności, należy zdecydować, która z opcji (tj. o jakim współczynniku *moneyness* przy danym terminie zapadalności) powinna być wykorzystana do implikowania zmienności. Najbardziej naturalny wydaje się wybór opcji „po cenie" (ATM, *at-the-money*), czyli takiej, dla której cena wykonania jest równa cenie bieżącej. Opcje ATM są z reguły najbardziej płynne i w związku z tym należy oczekiwać, że będą w najmniejszym zakresie podatne na zaburzenia związane z mikrostrukturą rynku (Figlewski [1997] przekonuje, że oszacowania zmienności implikowanej mogą się różnić nawet o kilka punktów procentowych ze względu na spread bid-ask). Stosuje się jednak także podejścia oparte na średnich ważonych zmienności implikowanych, w których wagi dobierane są na podstawie wolumenu transakcji, wartości współczynnika $\partial C/\partial \sigma$ czy odchyleń ceny rynkowej od ceny teoretycznej.

Niedługo po ukazaniu się przełomowych prac Blacka i Scholesa [1973] oraz Mertona [1973], pojawił się pogląd, że zmienność implikowana — ze względu na swój antycypacyjny, zorientowany na przyszłość charakter — mogłaby być wykorzystywana nie tylko jako prognoza oparta na oczekiwaniach uczestników rynku, lecz także jako potencjalny instrument bazowy, na który mogłyby opiewać kontrakty terminowe i opcje (dodatkowym bodźcem do rozwoju produktów na zmienność był jej znaczący wzrost obserwowany po załamaniu rynku w październiku 1987 r.; por. szczególnie [Brenner i Galai, 1989]), co jednak wymagało stworzenia referencyjnego indeksu zmienności implikowanej. Pierwsze próby na tym polu podjął jeszcze Gastineau [1977], który proponował konstrukcję opartą na zmiennościach implikowanych z opcji ATM na akcje 14 różnych spółek. Jego podejście poprawili Cox i Rubinstein [1985, Aneks 8A], uwzględniając po kilka różnych opcji dla każdej akcji i ważąc je w taki sposób, aby indeks był ATM i zachowywał stały tenor. Oba podejścia miały jednak dwie zasadnicze wady. Po pierwsze, koncentrowały się w gruncie rzeczy na ryzyku idiosynkratycznym, które można wyeliminować poprzez odpowiednią dywersyfikację portfela. Po drugie, opierały się tylko na jednym rodzaju opcji (call), co z konieczności ograniczało zawartość informacyjną.

Wprowadzony w 1993 r. przez giełdę chicagowską CBOE indeks zmienności rynkowej VIX był wolny od obu mankamentów. Ponieważ opierał się na opcjach na indeks giełdowy S&P 100, odzwierciedlał ogólne ryzyko rynkowe, wpływające jednocześnie na zmienność wyceny wszystkich spółek z indeksu. Dodatkowo w konstrukcji wykorzystywano zmienności implikowane z 8 najbardziej płynnych kontraktów opcyjnych (ATM), 4 typu call i 4 typu put, co ograniczało obciążenie i ewentualny wpływ na wycenę różnic w popycie/podaży poszczególnych typów opcji (Whaley [1993] przedstawia szczegółowo pierwotną metodę obliczania indeksu). Z czasem jednak zmieniły się uwarunkowania rynkowe, w szczególności znacznie wzrósł popyt ze strony inwestorów zabezpieczających swoje portfele na opcje put z niskimi cenami wykonania (*out-of-the-money*, OTM), a tym samym wzrosły obroty w tym segmencie rynku, poprawiła się płynność i zawęziły się spready bid-ask [Bollen i Whaley, 2004]. W konsekwencji w 2003 r. zmieniono konstrukcję indeksu VIX, stosując do jego wyliczenia znacznie szerszy zakres opcji kwotowanych na rynku[20], co umożliwiło wykorzystanie informacji zawartych w całej rynkowej powierzchni zmienności (a nie, jak poprzednio, jedynie w 8 opcjach ATM). Co więcej, w konstrukcji indeksu zrezygnowano ze zmienności implikowanych i podejścia BSM na rzecz — wolnej od założeń metodologicznych — statycznej replikacji *variance swapa*, czyli kontraktu terminowego na zrealizowaną wariancję. Kontrakt taki gwarantuje w chwili wygaśnięcia transakcji wypłatę postaci $\left(\sigma_R^2 - K_{var}\right)N$, gdzie σ_R^2 oznacza wariancję zrealizowaną w horyzoncie transakcji, K_{var} zakontraktowaną wariancję, N oznacza zaś nominał transakcji. Wypłata swapa przypomina opisany we Wstępie zysk z zabezpieczonej pozycji opcyjnej, choć tam kwadraty dziennych stóp zwrotu były ważone zmieniającą się w czasie gammą opcji (tj. wrażliwością delty na zmianę instrumentu bazowego):

$$\mathrm{P\&L} = \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S_t^2 \left[\left(\frac{\Delta S}{S} \right)^2 - \sigma^2 \Delta t \right] \tag{22}$$

Zatem konstruując portfel opcji, w którym łączna gamma jest stała niezależnie od poziomu S — można to osiągnąć wybierając wagi odwrotnie proporcjonalne do kwadratu ceny wykonania każdej opcji — uzyskuje się replikację *variance swap* [Derman i Kani, 1999)[21]. W nowej metodzie VIX oblicza się właśnie jako sumę opcji o stałej łącznej gammie, co jest równoważne wyznaczeniu oczekiwanej przez rynek wariancji indeksu S&P 500 [CBOE, 2003]. Nowa konstrukcja nie tylko lepiej odzwierciedla oczekiwania inwestorów zawarte w cenach opcji, ale — ze względu na możliwość replikacji — pozwala na rozwój instrumentów pochodnych bezpośrednio opartych na VIX (szerzej patrz np. [Carr i Lee, 2009; Rhoads, 2011]).

Corrado i Miller [2005] wykazują, że indeksy zmienności implikowanej zestawiane przez CBOE, w tym VIX, mają znacznie lepsze własności prognostyczne niż metody oparte na historycznym kształtowaniu się zmienności. Lu i Zhu [2010] wykorzystują kontrakty terminowe na VIX do konstrukcji struktury terminowej zmienności, Äijö [2008] wykorzystuje zaś indeksy zmienności implikowanej z rynków europejskich, aby pokazać silną korelację wyestymowanych struktur terminowych w Europie.

---

[20] Zmieniono także indeks bazowy na S&P 500 i przyjęto metodę annualizacji w oparciu o dni robocze, zamiast jak wcześniej kalendarzowe.

[21] W przypadku jednej opcji, zmiana S pociąga natychmiast zmianę Γ. Aby otrzymać instrument, który reaguje na wariancję niezależnie od zmian ceny instrumentu bazowego, należy zbudować portfel składający się z opcji o wszystkich możliwych cenach wykonania. Ponieważ im wyższa cena wykonania, tym bardziej wkład danej opcji do zagregowanej gammy zależy od S, każdą opcję należy uwzględnić z wagą odwrotnie proporcjonalną do kwadratu ceny wykonania. Portfel taki będzie miał ekspozycję na wariancję niezależną od S.

Ederington i Guan [2002] omawiają różne metody uśredniania zmienności implikowanych i konkludują, że sam wybór wag ma drugorzędne znaczenie. Istotniejsze jest natomiast obciążenie, które powoduje, że zmienność implikowana systematycznie przeszacowuje oczekiwaną zmienność na amerykańskim rynku akcji (por. także Fleming [1998] oraz Jorion [1995], który identyfikuje obciążenie także w opcjach walutowych). Obciążenie okazuje się jednak stałe w czasie, a przez to relatywnie łatwe do skorygowania. Niektórzy badacze oprócz korekty obciążenia stosują dodatkowo uśrednianie zmienności implikowanej w czasie (np. Beckers [1981] przekonuje, że zastosowanie 5-dniowej średniej poprawia zdolności predykcyjne zmienności implikowanej).

3.3. Podsumowanie

Względna ocena przedstawionych wyżej metod prognostycznych nie jest wcale łatwa. Po pierwsze, w różnych badaniach porównawczych stosuje się różne metody oceny jakości prognozy. Po drugie, badania są oparte na różnych zbiorach danych, obejmujących różne rynki i instrumenty bazowe. Niemniej można się pokusić o pewną syntezę. W swojej obszernej dokumentacji metod prognozowania zmienności Poon [2005] zestawiła wyniki blisko 100 badań podejmujących próbę względnej oceny przynajmniej dwóch z omówionych wyżej metod, tj. metod historycznych, modeli klasy GARCH i zmienności implikowanej. Z jej analizy wynika, że zmienność implikowana ma znacznie lepsze własności predykcyjne niż modele GARCH (17 prac zidentyfikowało przewagę zmienności implikowanej i tylko jedna przewagę modeli GARCH) oraz metody historyczne (26 prac zidentyfikowało taką właśnie zależność i tylko w 8 zidentyfikowano zależność odwrotną). Z kolei metody historyczne, mimo swojej prostoty, sprawdzają się lepiej niż modele GARCH, chociaż w tym wypadku różnica nie jest duża (22 prace potwierdzają względną przewagę w prognozowaniu metod historycznych, a tylko 17 prac modeli GARCH).

4. Powierzchnia zmienności i wycena opcji

Po przedyskutowaniu metod pomiaru i prognozowania zmienności można wreszcie przejść do sedna, tj. do wykorzystania prognoz przyszłej zmienności do wyceny opcji. Zagadnienie nie jest wcale trywialne, bo wymaga odpowiedniego dostosowania teorii wyceny, która wszak zakładała dotychczas, że zmienność jest stała w czasie. Sformułowanie prognozy zmienności i bezrefleksyjne podstawianie jej do wzoru (21) byłoby z logicznego punktu widzenia błędne, bo poprawnie oszacowana zmienna zostałaby wprowadzona do niepoprawnego modelu. W tym kontekście pojawia się więc pytanie nie tyle o prognozę, co o model zmienności, który uwzględniałby jej rynkowe kwotowania (implikowane z cen opcji) i pozwalał na spójną wycenę. Posługiwanie się metodą wyceny, która nie jest skalibrowana do danych rynkowych (nie jest z nimi spójna lub nie jest w stanie ich odtworzyć), naraża na potencjalnie znaczne ryzyko modelu[22], szczególnie w przypadku opcji egzotycznych, których wypłaty są z reguły replikowane bądź zabezpieczane opcjami *plain vanilla*. Dobrym przykładem są proste egzotyczne opcje binarne, których nabywca otrzymuje ustaloną stałą kwotę Q, jeśli cena danego instrumentu bazowego w momencie zapadalności będzie powyżej ceny wykonania K i nie dostaje nic w przeciwnym wypadku. Zgodnie z podejściem BSM wartość bieżąca takiej opcji jest równa wartości bieżącej oczekiwanej wypłaty ważonej prawdopodobieństwem, że w momencie zapadalności cena instrumentu bazowego znajdzie się powyżej ceny wykonania, czyli $Qe^{-rT}N(d_2)$ (por. np. Hun [2008]). Jednak Jex, Henderson i Wang [1999] pokazują, że ceny rynkowe opcji binarnych odchylają się od wartości teoretycznych z modelu BSM nawet o 10%. Dzieje się tak dlatego, że uczestnicy rynku patrzą na opcję binarną $B(K, T)$ nie przez pryzmat modelu, lecz statycznej replikacji— jako złożenie długiej pozycji w opcji call z ceną wykonania K i krótkiej pozycji w opcji call z ceną wykonania $K + \Delta K$ (dla $Q = 1$ należy wykorzystać jednostki każdej opcji). Gdy $\Delta K \to 0$ wypłata z takiej struktury zbiega do wypłaty opcji binarnej. Jednocześnie

$$B(K,T) = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{C(K,T) - C(K + \Delta K, T)}{\Delta K} = -\frac{\partial C(K.T)}{\delta K} \tag{23}$$

gdzie $C(K, T)$ jest ceną opcji call wyznaczoną z modelu BSM. Aby obliczyć (23) spójnie z kwotowaniami rynkowymi, należy uwzględnić obserwowaną powierzchnię zmienności $\sigma(K, T)$. Wówczas pochodna cząstkową funkcji złożonej $C[K, T, \sigma(K, T)]$ daje się zapisać jako:

$$B(K,T) = -\frac{\partial C}{\partial K} - \frac{\partial C}{\partial \sigma} \times \frac{\partial \sigma}{\partial K} \tag{24}$$

Ponieważ $\frac{\partial C}{\partial K} = -e^{-rT}N(d_2)$, to widać natychmiast, jak bardzo wycena opcji binarnej będzie odbiegać od teoretycznej wyceny BSM w zależności od kształtu uśmiechu zmienności.

Jak widać na podstawie powyższego przykładu, aby poprawnie wyceniać opcje, niezbędne jest stworzenie modelu zmienności, który byłby w stanie odtworzyć obserwowaną na rynku powierzchnię zmienności, w szczególności zależność zmienności zarówno od czasu, jak i od ceny wykonania opcji. Poniżej przedstawiono dwa takie podejścia — model zmienności lokalnej (deterministycznej powierzchni zmienności) i model zmienności stochastycznej[23].

---

[22] Rebonato [2001] definiuje ryzyko modelu jako „ryzyko wystąpienia znacznej różnicy pomiędzy wyceną z modelu a faktyczną ceną rynkową, po której dany skomplikowany lub niepłynny instrument został sprzedany na rynku".

[23] W sekcji tej celowo pominięto modele wyceny opcji opierające się na podejściu GARCH. Pionierem tego podejścia był Duan [1995], który pokazał, jak zmodyfikować podejście Blacka-Scholesa, gdy ewolucja stóp zwrotu z instrumentu bazowego jest opisana procesem GARCH. W istocie modyfikacja polega na zastąpieniu *ad hoc* stałej wariancji w modelu BSM jej dłu-

4.1. Model zmienności lokalnej

W dotychczasowych rozważaniach punktem wyjścia było oszacowanie zmienności — być może jako funkcji czasu $\sigma(t)$ — i wykorzystanie jej do wyceny opcji. Następnie, znając cenę opcji, można było podać jej implikowaną zmienność z modelu BSM (oczywiście jeśli do wyceny wykorzystano (21) zmienność implikowana byłaby równa tej podstawionej pierwotnie do wzoru). Istota modelu zmienności lokalnej polega na odwróceniu tej logiki postępowania. Ponieważ zmienności implikowane są kwotowane na rynku, a właściwa zmienność instrumentu bazowego jako taka jest nieobserwowalna, można spróbować oszacować nieznaną funkcję zmienności za pomocą dostępnych cen rynkowych. Najłatwiej to zrozumieć w prostszym przypadku gdy zmienność jest deterministyczną funkcją jednej zmiennej — czasu, $\sigma(t)$ (przypadek ten rozważał już Merton [1973]). Wówczas proces określający ewolucję cen akcji przyjmuje następującą postać: $dS = rSdt + \sigma(t)SdW$, gdzie r to stopa wolna od ryzyka, a $dW = \varepsilon\sqrt{dt}$ i $\varepsilon \sim N(0,1)$. Rozwiązaniem tego równania różniczkowego jest

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t r - \frac{\sigma^2(\tau)}{2} d\tau + \int_0^t \sigma(\tau) dW_\tau\right) \tag{25}$$

Przyjmując $\overline{\sigma^2}(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^t \sigma^2(\tau)d\tau$, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp\left(\int_0^t r - \frac{\sigma^2(\tau)}{2} d\tau + \int_0^t \sigma(\tau) dW_\tau\right) = \\ &= S_0 \exp\left(\left[r - \frac{\overline{\sigma^2}(0,t)}{2}\right] t + \int_0^t \sigma(\tau) dW_\tau\right) \end{aligned} \tag{26}$$

Stąd $S_T = S_T \exp\left(\left[r - \frac{\overline{\sigma^2}(\tau)}{2}\right] t + \int_0^T \sigma(\tau) dW_\tau\right)$, czyli $\ln(S_T/S_t)$ ma rozkład normalny o średniej $\left(r - \frac{\overline{\sigma^2}(t,T)}{2}\right)(T-t)$ i wariancji $\overline{\sigma^2}(t)(T-t)$. To z kolei oznacza, że jeśli zmienność jest deterministyczną funkcją czasu, równania BSM pozostają w mocy, przy czym miejsce stałej wartości σ zajmuje teraz $\overline{\sigma^2}(t)$ [dla ułatwienia notacji pominięto subskrypt t i pozostałe argumenty $C(\cdot)$]:

---

gookresową średnią wyestymowaną przy użyciu modelu GARCH. Ze względu na ograniczone ramy niniejszego opracowania zdecydowano się w dalszym ciągu skupić na modelach, które pokazują, w jaki sposób ekonomicznie uwzględnić heteroskedastyczną zmienność w wycenie opcji, tj. jak zabezpieczać pozycję opcyjną w sytuacji niestałej zmienności.

$$C\left(S,\sigma(\tau)\right)=SN\left(\frac{\ln\left(S/K\right)+rT+\frac{1}{2}\int_0^T\sigma^2(t)d\tau}{\sqrt{\int_0^T\sigma^2(\tau)d\tau}}\right)-$$
$$-Ee^{-rT}\left(\frac{\ln\left(S/K\right)+rT-\frac{1}{2}\int_0^T\sigma^2(\tau)d\tau}{\sqrt{\int_0^T\sigma^2(\tau)d\tau}}\right) \tag{27}$$

Na podstawie kwotowań cen opcji można teraz ustalić, w jaką postać funkcji $\sigma(t)$ wierzy rynek, a — mówiąc precyzyjniej — można ustalić wartości zmienności lokalnych $\sigma(t)$ dla wszystkich t. Taka kalibracja zakłada, że zmienność implikowana jest pierwiastkiem ze średniej lokalnych zmienności (wariancji). Jeśli $\Sigma(T)$ oznacza obserwowaną na rynku zmienność implikowaną opcji o cenie wykonania K i zapadalności T, to zagadnienie sprowadza się do rozwiązania równania:

$$\sqrt{\frac{1}{T-t}\int_t^T\sigma^2(\tau)d\tau}=\Sigma(T) \tag{28}$$

lub równoważnie:

$$\int_t^T\sigma^2(\tau)d\tau=\Sigma(T)^2(T-t) \tag{29}$$

Różniczkując obustronnie po T (przy założeniu, że t jest ustalone), otrzymuje się

$$\sigma^2(T)=2\Sigma(T)\Sigma'(T)(T-t)+\Sigma(T)^2 \tag{30}$$

Stąd zaś dla każdego $t\geq t_0$ $\sigma^2(t)=2\Sigma(t)\Sigma'(t)(t-t_0)+\Sigma(t)^2$. W praktyce oczywiście zmienności implikowane $\Sigma(t)$ są dostępne jedynie dla kilku standardowych okresów zapadalności, więc konieczne staje się przyjęcie kolejnego założenia, tym razem o strukturze terminowej zmienności. Z reguły zakłada się po prostu, że funkcja zmienności implikowanej jest przedziałami stała lub stosuje się interpolację liniową [Wilmott, 2006].

W powyższym przykładzie zmienność była jedynie funkcją czasu. Wiadomo jednak, że zmienności implikowane kwotowane na rynku zależą także od poziomu ceny wykonania. Tym samym w całej ogólności problem sprowadza się do ustalenia, czy — i w jakich warunkach — można znaleźć proces instrumentu bazowego $dS = S\mu(t)dt + \sigma(S, t)dW$, który byłby spójny z wszystkimi kwotowanymi na rynku cenami opcji dla wszystkich terminów zapadalności i cen wykonania. Twierdzącej odpowiedzi na to pytanie udzielili jako pierwsi równolegle Derman i Kani [1994] oraz Rubinstein [1994], w ujęciu dyskretnym, oraz Dupire [1993; 1994] w ujęciu ciągłym, pokazując w dodatku, że jeśli rynek opcji jest kompletny (niemożliwy jest arbitraż), to szukany proces jest jedynym. Parametr dyfuzji $\sigma(S, t)$ nazywa się funkcją zmienności lokalnej lub deterministyczną powierzchnią zmienności. Dupire [1993] oraz Andersen i Brotherton-Ratcliffe [1998] pokazali, że równanie różniczkowe określające kształtowanie się funkcji instrumentu bazowego jest naturalnym uogólnieniem równania (1):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial^2 S}S^2\sigma(S,t)^2+\frac{\partial C}{\partial t}+r\left(\frac{\partial C}{\partial S}S-C\right)=0 \qquad (31)$$

Co więcej, funkcja zmienności lokalnej daje się wyznaczyć analitycznie na podstawie cen opcji $C(K, T)$ w następujący sposób:

$$\sigma^2(K,T)=2\frac{\dfrac{\partial C}{\partial T}+\tau K\dfrac{\partial C}{\partial K}}{K^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial K^2}} \qquad (32)$$

Oczywiście powierzchnia zmienności rozpięta na cenach $C(K, T)$ nie jest ciągła ani różniczkowalna — zmienności implikowane Σ są znane tylko dla skończonej (i w niektórych segmentach rynku bardzo niewielkiej) liczby punktów (C, K). Aby równanie (32) mogło być wykorzystane w praktyce konieczne jest więc sparametryzowanie powierzchni zmienności za pomocą interpolacji[24]. Zasadnicza trudność polega tu z jednej strony na zachowaniu kompletności rynku (tj. niedopuszczenia możliwości arbitrażu), a z drugiej — na utrzymaniu efektywności obliczeniowej. Alternatywne metody parametryzacji zaproponowali Schimko [1993], Dewynne, Whalley i Willmot [1998] oraz Gatheral [2004], a ostatnio Fengier [2009] (por. także obszerne omówienie w [Gatheral, 2006]). Wyznaczywszy powierzchnię zmienności, można już w sposób spójny wycenić każdą opcję, korzystając z równań (31) i (32) (choć nie da się na ogół podać wzoru na cenę opcji w sposób jawny).

Model zmienności lokalnej nie jest modelem kształtowania się zmienności podobnym do tych rozważanych w sekcji (3). Nie powinno zatem dziwić, że oszacowana funkcja zmienności lokalnej jest dość niestabilna w czasie i nie pozwala na prognozowanie cen opcji z satysfakcjonującą dokładnością [Dumas, Fleming i Whaley, 1998]. Jednak istotą zmienności lokalnej nie jest prognozowanie zmienności, a jedynie umożliwienie wyceny kontraktów opcyjnych (przede wszystkim egzotycznych) spójnie z cenami obserwowanymi na rynku. Oczywiście ceny rynkowe nie muszą być „prawdziwe" czy „równowago-

[24] Alternatywnie, jak proponują Derman i Kani [1994] oraz Rubinstein [1994], można zastosować także podejście nieparametryczne, w którym funkcję zmienności lokalnej znajduje się numerycznie przez dopasowanie drzewa dwumianowego do obserwowanych cen opcji. Avellaneda, Friedman, Holmes i Samperi [1997] dopasowują powierzchnię zmienności poprzez minimalizację funkcji entropii (brakujących danych).

we" w fundamentalnym sensie, ale uwzględnienie ich w wycenie pozwala zniwelować ryzyko modelu związane z bardziej wyrafinowanymi konstrukcjami.

4.2. Modele zmienności stochastycznej

Modele zmienności stochastycznej[25] są skonstruowane w taki sposób, aby odtworzyć zależność zmienności od ceny instrumentu bazowego oraz czasu. Jednak — inaczej niż w modelu zmienności lokalnej — tu zmienność nie jest już deterministyczna, lecz stochastyczna. Model w postaci ogólnej można zapisać następująco (notacja za [Gatheral, 2006]):

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dZ_1 \\ d\sigma_t &= \alpha\left(S_{t,} v_t, t\right)dt + \eta\beta\left(S_t, v_t, t\right)dZ_2 \end{aligned} \tag{33}$$

gdzie: v_t jest wariancją S, η oznacza zmienność samej zmienności, $\alpha(\cdot)$ oraz $\beta(\cdot)$ determinują ewolucję zmienności i — zależnie od specyfikacji modelu — mogą mieć dowolną postać, a Z_1 i Z_2 są skorelowanymi procesami Wienera: $\mathrm{corr}(dZ_1, dZ_2) = \rho dt$. Gdy $\eta \to 0$, równanie (33) sprowadza się do omówionego już wyżej przypadku zmienności jako deterministycznej funkcji czasu. Kiedy zmienność jest stochastyczna, równanie różniczkowe BSM (1) nie daje się już tak naturalnie rozszerzyć jak dla deterministycznych powierzchni zmienności. W podejściu BSM występuje jeden czynnik ryzyka — cena instrumentu bazowego — którego wpływ na opcję można zneutralizować przez otwarcie długiej bądź krótkiej pozycji w S_t. Tu natomiast należy dodatkowo zneutralizować wpływ na cenę opcji stochastycznych zmian samej zmienności, co można osiągnąć np. przez zawarcie krótkiej pozycji w innym instrumencie finansowym, którego wycena jest funkcją zmienności (np. opcji lub kontrakcie terminowym na zmienność). Analogicznie jak w podejściu BSM, chcąc wycenić opcję C należy zbudować portfel lokalnie wolny od ryzyka, składający się z opcji C, $-\Delta$ jednostek instrumentu bazowego S oraz $-\Delta_1$ jednostek instrumentu, którego wartość C_1 także zależy od zmienności:

$$\Pi = C - \Delta S - \Delta_1 C_1 \tag{34}$$

Korzystając z Lematu Ito oraz argumentu o braku możliwości arbitrażu, otrzymuje się następujące równanie, które musi spełniać C [Garman, 1976]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho\eta v \beta S \frac{\partial^2 C}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2}\eta^2 v \beta^2 \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} + r\left(S\frac{\partial C}{\partial S} - C\right) = \\ &= -\left(\alpha - \phi\beta\sqrt{v}\right)\frac{\partial C}{\partial v} \end{aligned} \tag{35}$$

---

[25] Dobre omówienie zmienności stochastycznej można znaleźć w Wilmott [2006, t. 3, rozdz. 51] lub Gatheral [2006]. Dalsza dyskusja opiera się w dużym stopniu na tym pierwszym źródle.

Ponieważ ϕ określa inkrementalny dochód za poniesioną jednostkę ryzyka zmienności dZ_2, funkcję $\phi(\cdot)$ nazywa się przez analogię z modelem CAPM premią za ryzyko zmienności (zmienności). Pełna specyfikacja modelu zmienności stochastycznej wymaga oczywiście określenia funkcji α, β, ϕ. W tym celu można albo oszacować α i β metodami ARCH oraz wyekstrahować ϕ z cen opcji, albo bezpośrednio dobrać $\alpha - \phi\beta$ przez kalibrację (35) do cen opcji kwotowanych na rynku.

Jeden z pierwszych modeli zmienności stochastycznej sformułowali Hun i White [1987], którzy pokazali, że przy $\rho = 0$ wartość godziwa opcji jest równa całce z cen w podejściu BSM, obliczonej po rozkładzie σ^2. Heston [1993] zaproponował model, w którym występuje niezerowa korelacja instrumentu bazowego i zmienności i jednocześnie daje się wyznaczyć w jawnej postaci wzory na ceny opcji. W modelu Hestona przyjmuje się $\alpha = \kappa(\theta - \sigma^2)$ oraz $\beta = \eta\sigma$, gdzie θ jest długookresową średnią wariancji, a κ oznacza szybkość powrotu do średniej. Barndorff-Nielsen i Shephard [2001] oraz Nicolato i Venardos [2003] proponują z kolei model zmienności oparty na niegaussowskich procesach Ornsteina-Uhlenbecka i także wyprowadzają wzory na cenę opcji w postaci jawnej. Niektórzy autorzy sugerują wzbogacenie modelu zmienności stochastycznej o nieciągłe skoki pojawiające się w równaniu wariancji [Bates, 1996; Duffie, Pan i Singleton, 2003]. Dobre omówienie względnych wad i zalet powyższych metod z perspektywy wyceny opcji i replikacji obserwowanego empirycznie uśmiechu zmienności przedstawiają np. Andersen i Andreasen [2000], z kolei Poon [2005] oraz Bauwens, Hafner i Laurent [2012] analizują modele zmienności stochastycznej od strony ekonometrycznej i oceniają ich zdolności predykcyjne.

4.3. Podsumowanie

Chociaż oba omówione wyżej modele — zmienności lokalnej i stochastycznej — pozwalają na sformułowanie prognoz przyszłej zmienności, ich główną rolą jest umożliwienie wyceny opcji spójnie z kwotowaniami dostępnymi na rynku — co tłumaczy umiejscowienie obu modeli w osobnym rozdziale. Kalibracja modeli do cen rynkowych nie musi wynikać z przekonania, że rynek dokonał poprawnego oszacowania zmienności — chociaż, jak przekonuje Poon [2005], właśnie zmienność implikowana ma najlepsze własności prognostyczne — lecz z ostrożnego zarządzania ryzykiem modeli [Rebonato, 2001; Morini, 2011]. Najbliżej tej perspektywy jest model zmienności lokalnej, który nie postuluje żadnej parametrycznej struktury procesu zmienności, lecz wychodzi z założenia, że jej ewolucja w czasie jest w pełni opisana przez rynkową powierzchnię zmienności implikowanej. Modele zmienności stochastycznej opisują fundamentalnie kształtowanie się zmienności jako wielkości stochastycznej (oraz jej korelację z procesem ceny instrumentu bazowego), lecz są na ogół trudniejsze w kalibracji [Wilmott, 2006]. Schonbucher [1999] łączy zalety obu podejść, proponując stochastyczny model zmienności implikowanej.

5. Wnioski

W świetle omówionych wyżej wyników prowokacyjna teza Goldsteina i Taleba, przywołana na początku, wydaje się jednak nieco na wyrost. Pojęcie zmienności ma dość naturalną interpretację statystyczną, niemniej — ze względu na nieobserwowalny charakter zmienności jako takiej — pytanie o jej najbardziej efektywny estymator czy metodę prognozowania nie jest trywialne. Należy zwłaszcza oczekiwać, że odpowiedź zawsze będzie w jakimś stopniu zależeć od charakteru danych, ich częstotliwości, stosunku sygnału do szumu itp. Z literatury wyłania się jednak konsens co do tego, że efektywna estymacja zmienności opiera się na wykorzystaniu danych śróddziennych i koncepcji zmienności zrealizowanej (czyli sumy kwadratów stóp zwrotu obliczonych w bardzo krótkich, np. 5-minutowych, odstępach czasu) lub zrealizowanego zakresu zmian. Wydaje się także, że zmienność daje się przynajmniej w jakimś stopniu prognozować, przy czym najlepsze prognozy pochodzą z cen opcji kwotowanych na rynku. Jest to zresztą zgodne z teorią prognozowania, ponieważ przewidywania rynkowe powinny być oparte na szerszym zbiorze informacji niż prognozy oparte na analizie szeregów czasowych (z konieczności *backward looking*). Literatura dotycząca prognozowania zmienności nie mówi jednak na ogół wiele o tym, jak uzyskane oszacowania zastosować w praktyce do skonstruowania zabezpieczonej pozycji opcyjnej, a w związku z tym jak poprawnie wyceniać opcje. Słynny wzór Blacka-Scholesa, w którym zmienność jest właściwie jedynym nieznanym parametrem, został wyprowadzony przy założeniu, że zmienność jest stała. Sformułowanie prognozy zmienności i podstawianie jej do wzoru byłoby więc z logicznego punktu widzenia błędne, bo poprawnie oszacowany parametr zostałby wprowadzony do niepoprawnego modelu. Okazuje się jednak, że możliwe jest zachowanie ducha teorii Blacka-Scholesa także przy założeniu niestałej zmienności, będącej funkcją czasu, czasu i ceny instrumentu bazowego, a nawet zmienną czysto stochastyczną. Każdy z tych modeli pozwala na uchwycenie jakiegoś elementu empirycznie obserwowanego charakteru zmienności (a w szczególności jej wyceny rynkowej) i w każdym możliwe jest zbudowanie zabezpieczonej pozycji opcyjnej i sformułowanie równania różniczkowego, którego rozwiązaniem (przy danych warunkach brzegowych) jest cena opcji. Wprawdzie na ogół nie jest już możliwe zapisanie wzoru na cenę opcji w postaci jawnej, ale daje się odtworzyć strukturę cen rynkowych metodami numerycznymi.

Bibliografia

Äijö J., 2008, *Implied volatility term structure linkages between VDAX, VSMI and VSTOXX volatility indices*, „Global Finance Journal” 18(3), s. 290–302.

Ait-Sahalia Y. oraz Mykland P.A., 2009, *Estimating Volatility in the Presence of Market Microstructure Noise: A Review of the Theory and Practical Considerations*, w: T. Mikosch (red.), *Handbook of Financial Time Series*, s. 577–598, Springer Berlin Heidelberg.

Ait-Sahalia Y., Mykland P.A. oraz Zhang L., 2005, *Row Often to Sample a Continuous-Time Process in the Presence of Market Microstructure Noise*, „Review of Financial Studies" 18(2), s. 351–416.
Alizadeh S., Brandt M.W. oraz Diebold F.X., 2002, *Range-Based Estimation of Stochastic Volatility Models*, „Journal of Finance" 57(3), s. 1047–1091.
Andersen L. oraz Andreasen J., 2000, *Jump-Diffusion Processes: Volatility Smile Fitting and Numerical Methods for Option Pricing*, „Review of Derivatives Research" 4(3), s. 231–262.
Andersen L. oraz Brotherton-Ratcliffe R., 1998, *The equity option volatility smile: an implicit finite-difference approach*, „Risk": 1(2), s. 5–37.
Andersen T.G. oraz Bollerslev T., 1998, *Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts*, „International Economic Review" 39(4), s. 885–905.
Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X. oraz Ebens H., 2001, *The distribution of realized stock return volatility*, „Journal of Financial Economics" 61(1), s. 43–76.
Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X. oraz Labys P., 2003, *Modeling and Forecasting Realized Volatility*, „Econometrica" 71(2), s. 579–625.
Avellaneda M., Friedman C., Holmes R. oraz Samperi D., 1997, *Calibrating volatility surfaces via relative-entropy minimization*, „Applied Mathematical Finance" 4(1), s. 37–64.
Barndorff-Nielsen O.E. oraz Shephard N., 2002, *Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models*, „Journal of the Royal Statistical Society Series B" 64(2), s. 253–280.
Barndorff-Nielsen O.E. oraz Shephard N., 200, *Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and same of their uses in financial economics*, „Journal of the Royal Statistical Society Series B" 63(2), s. 167–241.
Bates D.S., 1996, *Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options*, „Review of Financial Studies" 9(1), s. 69–107.
Bauwens L., Hafner C. oraz Laurent S., 2012, *Handbook of Volatility Models and Their Applications*, Wiley.
Beckers S., 1981, *Standard deviations implied in option prices as predictors of future stock price variability*, „Journal of Banking & Finance" 5(3), s. 363–381.
Black F., 1976a, *The Pricing of Commodity Contracts*, „Journal of Financial Economics" 3, s. 167–179.
Black F., 1976b, *Studies of stock price volatility of changes*, „Procedings of 1976 American Statistical Association, Business and Economical Statistics Section", s. 177–181.
Black F., 1986, *Noise*, „Journal of Finance" 41(3), s. 529–43.
Black F. oraz Scholes M.S., 1973, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, „Journal of Political Economy" 81(3), s. 637–54.
Blair B.J., Poon S.-H. oraz Taylor S.J., 2001, *Forecasting S&P 100 volatility: the incremental information content of implied volatilities and high-frequency index returns*, „Journal of Econometrics" 105(1), s. 5–26.
Bollen N.P.B. oraz Whaley R.E., 2004, *Does Net Buying Pressure Affect the Shape of Implied Volatility Functions?*, „Journal of Finance" 59(2), s. 711–753.
Bollerslev T., 1986, *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, „Journal of Econometrics" 31(3), s. 307–327.
Brandt M.W. oraz Kinlay J., 2005, *Estimating Historical Volatility*, „Discussion paper, Investment Analytics".
Brenner M. oraz Galai D., 1989, *New Financial Instruments for Hedging Changes in Volatility*, „Financial Analysts Journal" Vol. 45(4), s. 61–65.

Burghardt G. oraz Lane M., 1991, *How to tell if options are cheap*, „The Journal of Portfolio Management" 16(2), s. 72–78.

Carr P. oraz Lee R., 2009, *Volatility Derivatives*, „Annual Review of Financial Economies" 1(1), s. 319–339.

Carr P. oraz Madan D., 2002, *Towards a Theory of Volatility Trading*, w: R. Jarrow (red.), *Volatility*, s. 417–427, Risk Publications.

CBOE, 2003, *The CBOE Volatility Index — VIX*, http://www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf

Christie A., 1982, *The stochastic behaviour of common stock variances: Value, leverage, and interest rate effect*, „Journal of Financial Economies" 10, s. 407–432.

Cont R., 2001, *Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues*, „Quantitative Finance" 1, s. 223–236.

Corrado C.J. oraz Miller T.W., 2005, *The Forecast Quality of CBOE Implied Volatility Indexes*, „Journal of Futures Markets" 25(4), s. 339–373.

Cox J.C. oraz Rubinstein M., 1985, *Options Markets*, Prentice Hall.

Dacorogna M., Gençay R., Müller U.A., Pictet O. oraz Olsen R., 2001, *An Introduction to High-Frequency Finance*, Academic Press.

Damodaran A., 2007, *Strategic Risk Taking: A Framework For Risk Management*, Pearsan Prentice Hall.

Danielsson J., oraz Zigrand J.-P. 2006, *On time-scaling of risk and the square-root--of-time rule*, „Journal of Banking & Finance" 30(10), s. 2701–2713.

Derman E., Kamal M., Kani I., McClure J., Pirasteh C. oraz Zou J.Z., 1998, *Investing in volatility*, w: „Futures and Options World", Special Supplement on 25th Anniversary of the Publication of the Black-Scholes Model.

Derman E. oraz Kani I., 1994, *Riding on a smile*, „Risk" 7, s. 32–39.

Derman E. oraz Kani I., 1999,*More than you ever wanted to know about volatility swaps*, „Discussion paper, Quantitative Strategies Research Notes", Goldman Sachs.

Dewynne J., Whalley A. oraz Willmot P., 1998, *A simple volatility surface parametrization*, „Mfg working paper", Oxford University.

Ding Z., Granger C.W.J. oraz Engle R.F., 1993, *A long memory property of stock market returns and a new model*, „Journal of Empirical Finance" 1 (1), s. 83–106.

Doman M. oraz Doman R., 2009, *Modelowanie zmienności i ryzyka. Metody ekonometrii finansowej*, Wolters Kluwer.

Duan J.-C., 1995, *The GARCH option pricing model*, „Mathematical Finance" 5(1), s. 13–32.

Duffie D., Pan J. oraz Singleton K., 2003, *Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions*, „Econometrica" 68(6), s. 1343–1376.

Dumas B., Fleming J. oraz Whaley R.E., 1998, *Implied Volatility Functions: Empirical Tests*, „Journal of Finance" 53(6), s. 2059–2106.

Dupire B., 1993, *Pricing and hedging with smiles*, „Discussion paper, Paribas Capital Markets — Swaps and Options Research Team", London UK.

Dupire B., 1994, *Pricing with a smile*, „Risk" 7, s. 18–20.

Ederington L.H. oraz Guan W., 2002, *Measuring implied volatility: Is an average better? Which average?*, „Journal of Futures Markets" 22(9), s. 811–837.

Engle R.F., 2002, *New frontiers for arch models*, „Journal of Applied Econometrics" 17(5), s. 425–446.

Engle R.F., 1982, *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, „Econometrica" 50(4), s. 987–1007.

Engle R.F. oraz Bollerslev T., 1986, *Modelling the persistence of conditional variances*, „Econometric Reviews" 5(1), s. 1–50.

Fama E., 1970, *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*, „Journal of Finance" 25(2), s. 383–417.

Fengler M., 2009, *Arbitrage-free smoothing of the implied volatility surface*, „Quantitative Finance" 9(4), s. 417–428.

Figlewski S., 1997, *Forecasting Volatility*, „Financial Markets, Institutions and Instruments" 6, s. 1–88.

Fleming J., (1998, *The quality of market voltility forecasts implied by S&P 100 index option prices*, „Journal of Empirical Finance" 5(4), s. 317–345.

French K.R., 1980, *Stock returns and the weekend effect*, „Journal of Financial Economics" 8(1), s. 55–69.

French K.R. oraz Roll R., 1986, *Stock return variances: The arrival of information and the reaction of traders*, „Journal of Financial Economics" 17(1), s. 5–26.

Fung W. oraz Hsieh D., 1991, *Empirical analysis of implied volatility: Stocks, bonds and currencies*, „Working paper", Department of Finance, Fuqua School of Business.

Garman M.B., 1976, *A General Theory of Asset Valuation under Diffusion State Processes*, „Research Program in Finance Working Papers" 50, University of California at Berkeley.

Garman M.B. oraz Klass M.J., 1980, *On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data*, „The Journal of Business" 53(1), s. 67.

Gastineau G.L., 1977, *An Index of Listed Option Premiums*, „Financial Analysts Journal" 33(3), s. 70–75.

Gatheral J., 2004, *A parsimonious arbitrage-free implied volatility parameterization with application to the valuation of volatility derivatives*, „Discussion paper", Global Derivatives and Risk Management Conference, Madrid.

Gatheral J., 2006, *The Volatility Surface — A Practitioner's Guide*, John Wiley & Sons Ltd.

Gençay R., Ballocchi G., Dacorogna M., Olsen R. oraz Pictet O., 2002, *Real-Time Trading Models and the Statistical Properties of Foreign Exchange Rates*, „International Economic Review" 43(2), s. 463–492.

Glosten L.R., Jagannathan R. oraz Runkle D.E., 1993, *On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*, „Journal of Finance" 48(5), s. 1779–1801.

Goldstein D.G. oraz Taleb N.N., 2007, *We Don't Quite Know What We are Talking About When We Talk About Volatility*, „Journal of Portfolio Management" 33(4), s. 84–86.

Hansen P.R., Huang Z. oraz Shek H.H., 2011, *Realized GARCH: A Joint Model for Returns and Realized Measures of Volatility*, „Journal of Applied Econometrics" 27(6), s. 877–906.

Hansen P.R. oraz Lunde A., 2006, *Realized Variance and Market Microstructure Noise*, „Journal of Business and Economic Statistics" 24(2), s. 127–161.

Hautsch N., 2011, *Econometrics of Financial High-Frequency Data*, Springer.

Heston S.L., 1993, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to band and currency options*, „Review of Financial Studies" 6(2), s. 327 –343.

Hudson R., 2010, *Comparing Security Returns is Harder than You Think: Problems with Logarithmic Returns*, „Discussion paper", Newcastle University.

Hull J.C. oraz White A., 1987, *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, The „Journal of Finance" 42(2), s. 281–300.

Hull J.C., 2008, *Options, Futures & Other Derivatives*, Prentice Hall, 7 edn.

Hull J.C., 2009, *Options, Futures, and Other Derivatives*, Pearson.

Jex M., Henderson R. oraz Wang D., 1999, *Pricing exotics under the smile*, „Risk Magazine", s. 72–75.

Jorion P., 1995, *Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market*, „Journal of Finance" 50(2), s. 507–28.
Jorion P., 2006, *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw-Hill.
Lehmann E.L. oraz Casella G., 1998, *Theory of point estimation*, Springer Verlag.
Lequeux P. (ed.), 1999, *Financial Markets Tick By Tick*, Wiley.
Lewis A., 2000, *Option Valuation under Stochastic Volatility*, Finance Pr.
Lintner J., 1965, *The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets*, „The Review of Economics and Statistics" 47, s. 13–37.
Longerstaey J., 1996, *Risk Metrics — Technical Document*, „Discussion paper", J.P. Morgan Risk Management Advisory.
Lu Z. oraz Zhu Y., 2010, *The Volatility Components: The Term Structure Dynamics of VIX Futures*, „The Journal of Futures Markets" 30(3), s. 230–256.
Lunde A. oraz Hansen P.R., 2005, *A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1)?*, „Journal of Applied Econometrics" 20(7), s. 873–889.
Markowitz H., 1952, *Portfolio Selection*, „The Journal of Finance" 7(1), s. 77–91.
Markowitz H., 1959, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, „Discussion paper, Cowles Foundation Monograph" No. 16.
Martens M. oraz van Dijk D., 2007, *Measuring volatility with the realized range*, „Journal of Econometrics" 138(1), s. 181–207.
Merton R.C., 1973, *Theory of Rational Option Pricing*, „Bell Journal of Economics" 4(1), s. 141–183.
Morini M., 2011, *Understanding and Managing Model Risk: A Practical Guide for Quants, Traders and Validators*, Wiley Finance.
Nandi S., 1998, *How Important is the Correlation Between Returns and Volatility in a Stochastic Volatility Model? Empirical Evidence from Pricing and Hedging in the S&P 500 Index Option Market*, „Journal of Banking and Finance" 22, s. 589–610.
Natenberg S., 1994, *Option Volatility & Pricing: Advanced Trading Strategies and Techniques*, McGraw-Hill.
Neftci S.N., 2008, *Principles of Financial Engineering*, Elsevier.
Nelson D.B., 1991, *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*, „Econometrica" 59(2), s. 347–370.
Nelson D.B. oraz Cao C.Q., 1992, *Inequality Constraints in the Univariate GARCH Model*, „Journal of Business & Economic Statistics" 10(2), s. 229–35.
Nicolato E. oraz Venardos E., 2003, *Option Pricing in Stochastic Volatility Models of the Ornstein-Uhlenbeck type*, „Mathematical Finance" 13(4), s. 445–466.
Parkinson M., 1980a, *The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return*, „The Journal of Business" 53(1), s. 61–65.
Parkinson M., 1980b, *The extreme value method for estimating the variance of the rate of return*, „Journal of Business" 53(1), s. 61–65.
Poon S.-H., 2005, *A Practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility*, John Wiley & Sons Ltd.
Rebonato R., 2001, *Managing Model Risk*, Prentice Hall Financial Times Press.
Rebonato R., 2007, *Plight of the Fortune Tellers*, Princeton University Press.
Rhoads R., 2011, *Trading VIX Derivatives: Trading and Hedging Strategies Using VIX Futures, Options, and Exchange Traded Notes*, Wiley Trading.
Rogers L.C.G. oraz Satchell S.E., 1991a, *Estimating variance from high, law and closing prices*, „Annals of Applied Probability" 1, s. 504–512.
Rogers L.C.G. oraz Satchell S.E., 1991b, *Estimating Variance From High, Low and Closing Prices*, „The Annals of Applied Probability", 1(4), s. 504–512.

Rogers L.C.G., Satchell S.E. oraz Yoon Y., 1994, *Estimating the volatility of stock prices: a comparison of methods that use high and law prices*, „Applied Financial Economics" 4(3), s. 241–247.
Rubinstein M., 1994, *Implied binomial trees*, „Journal of Finance" 49, s. 771–818.
Schimko D., 1993, *Bounds on probability*, „Risk" 6, s. 33–37.
Schonbucher P.J., 1999, *A market model for stochastic implied volatility*, „Philosophical Transaction of the Royal Society" 357(1758), s. 2071–2092.
Schwert G.W., 1989, *Why Does Stock Market Volatility Change over Time?*, „Journal of Finance" 44(5), s. 1115–53.
Sharpe W.F., 1964, *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, „The Journal of Finance" 19(3), s. 425–442.
Shu J. oraz Zhang J.E., 2006, *Testing range estimators of historical volatility*, „Journal of Futures Markets" 26(3), s. 297–313.
Sinclair E., 2008, *Volatility Trading*, Wiley Trading.
Ślepaczuk R. oraz Zakrzewski G., 2008, *High-Frequency and Model Free Volatility Estimators*, „Working Paper" 13/2009 (23), University of Warsaw, Faculty of Economic Sciences.
Taylor J.W., 2004, *Volatility forecasting with smooth transition exponential smoothing*, „International Journal of Forecasting" 20(2), s. 273–286.
Taylor S.J., 1986, *Modeling Financial Time Series*, John Wiley and Sons, Chichester, UK.
Whaley R.E., 1993, *Derivatives on Market Volatility: Hedging Tools Long Overdue*, „Journal of Derivatives" 1, s. 71–84.
Wilmott P., 2006, *Paul Wilmott On Quantitative Finance*, John Wiley & Sons Ltd.
Yang D. oraz Zhang Q., 2000, *Drift-Independent Volatility Estimation Based on High, Low, Open, and Close Prices*, „Journal of Business" 73(3), s. 477–91.
Zhang L., Mykland P.A. oraz Ait-Sahalia Y., 2005, *A Tale of Two Time Scales: Determining Integrated Volatility With Noisy High-Frequency Data*, „Journal of the American Statistical Association" 100, s. 1394–1411.

Abstract **Volatility Measurement, Modeling and Forecasting—An Overview of the Literature**

The paper presents an overview of the literature on volatility measurement, modeling and forecasting, from the perspective of option pricing. The following conclusions are drawn. First, efficient volatility estimation utilizes intraday data and measures such as realized volatility (i.e. sum of squared returns calculated over short, e.g. 5-minute, time intervals) or realized range. Second, volatility lends itself—at least to some extent—to forecasting, whereby the most efficient forecasts are those extracted from option prices quoted on the market, which squares with the basic theory of forecasting as market expectations are based on a broader set of information than backward-looking time series forecasts. Third, although Black-Scholes option pricing theory was derived under the assumption of constant volatility, the approach can be fairly easily generalized to cover cases of time-dependent, time and asset price dependent, and even stochastic volatility. Each of those models allows to capture some key element of the empirically observed pattern of market returns and each allows constructing a hedged option position that leads to a differential equation determining the option price (under specified boundary conditions), although not always in closed form.

Key words: historical variability, implied volality, valuation of options, generalized autoregressive conditional heteroskedasticy

JEL classification: C58, G13